CAMBRIDGE



群的表示和特征标（第2版）

〔英〕Gordon James Martin Liebeck 著

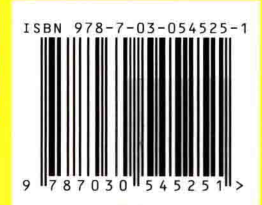
杨义川 刘瑞珊 任燕梅 庄 晓 译

科学出版社

(O-7047.31)








科学数理分社
电话：(010)64011058
E-mail：lixin_kx@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等数学



定 价：168.00 元

现代数学译丛 30

群的表示和特征标

（第2版）

〔英〕 Gordon James　Martin Liebeck　著

杨义川　刘瑞珊　任燕梅　庄　晓　译



科 学 出 版 社

北　京

图字：01-2017-6273 号

内 容 简 介

在本书的第 2 版中，我们采用现代观点介绍有限群表示理论. 在该版中我们对第 1 版作了修订并增加了大量新的内容. 由于进一步学习的需要，本书采用模论语言论述群表示，并且重点讨论如何构造特征标. 本书给出了许多群的特征标表，其中包括所有阶数小于 32 的群，以及所有阶数小于 1000 的单群.

本书还给出了群表示的许多应用，其中包括 Burnside p^aq^b 定理、通过特征标理论研究子群的结构与置换群，以及运用表示论来研究分子的振动.

在每一章的后面都附有形式多样的习题，并且在书末给出了所有习题的详细的答案. 本书可以作为群表示理论的一本理想的参考书籍，考虑到群表示理论在各个学科上的应用，本书也可供数学、化学、物理学方面的科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

群的表示和特征标/（英）戈登·詹姆斯（Gordon James），（英）马丁·李贝克（Martin Liebeck）编著；杨义川等译. —2 版. —北京：科学出版社，2017.9

(现代数学译丛；30)

书名原文：Representations and Characters of Groups

ISBN 978-7-03-054525-1

Ⅰ. ①群… Ⅱ. ①戈… ②马… ③杨… Ⅲ. ①群表示 Ⅳ. ①O152.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 229378 号

责任编辑：李 欣 / 责任校对：胡小洁
责任印制：张 伟 / 封面设计：耕者设计

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 9 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2018 年 1 月第二次印刷 印张：25 1/2
字数：515 000

定价：168.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

版权声明

Representations and Characters of Groups, second edition (9780521003926) by Gordon James, Martin Liebeck first published by Cambridge University Press 2001

This simplified Chinese edition for the People's Republic of China is published by arrangement with the Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom.

译 者 序

本书对代数学及相关专业、理论物理学、理论化学等专业的科技工作者具有学术参考价值. 可作为高等院校数学系、物理系和化学系的研究生以及高年级本科生的群表示论课的教学用书, 也可供数学系、物理系和化学系教师、科研工作者以及学过高等代数和抽象代数的读者作为参考书. 本书所需基础知识在书中都有相应准备; 由简单例子入手, 由浅入深, 层层递进, 结构清晰, 易于理解, 便于自学, 容易入门, 每个知识点都配合相关例题加以补充; 专有一章介绍表示论在物理和化学中的应用实例.

为方便读者阅读, 我们在翻译的过程中加入了一些对原书内容的修正, 均以脚注的形式在本书中标记出来.

除了脚注的一些问题之外还发现如下问题:

(1) 英文单词拼写错误, 例如把 more than 打成 more then 等;

(2) 部分单位元 1 构成的群没有加大括号, 本书统一加了大括号;

(3) 原书提及参考文献时没有加书目序号, 本书加了对应的序号.

此外, 译者对 22.14 推论的证明过程和 26.2 引理的证明过程做了详细的补充, 并对 26.9 中小于 32 阶的群的特征标表进行了详细化列举.

非常感谢孙玉姣博士对译稿前 20 章的仔细阅读和提出诸多宝贵的建议.

翻译过程中难免有不妥或疏漏之处, 欢迎读者不吝指教.

译 者

2015 年 4 月 3 日于北京航空航天大学

第 2 版前言

在第 2 版中, 我们增加了两个新的章节: 一个是第 28 章, 在该章中我们讨论一个具有无限个群的群类的特征标表, 另一个是第 29 章, 在该章中我们讨论一些有关置换群的表示理论. 我们在第 20、23 和 30 章中增加了一些新的内容, 并对第一版的其他部分作了一些小的修改.

第 1 版前言

编写本书的目的是希望向读者系统地介绍群表示理论, 但是我们为什么要学习群表示论呢?

群表示就是用具体的矩阵群来描述群的理论. 该理论不仅结论优美, 而且还提供了研究有限群结构的有效方法. 例如, 在通常情况下为了更清晰地了解某个群, 选用一个具体的群来表征这个抽象的群是很关键的, 而群的矩阵表示则提供了一个很好的方法. 并且通过学习一个群的不同的表示可以帮助我们得到表示理论以外的结果. 举一个简单的例子: 所有阶数为 p^2(其中 p 是一个素数) 的群均为交换群, 虽然通过群论知识可以快速得出这样的结论, 然而也可以利用群表示论的基本结论推导出该结论. 更一般地, 如所有阶数为 p^aq^b(其中 p 和 q 都是素数) 的群均为可解群, 该结论是一个群论的结果, 然而它的最好的证明却是 Burnside 运用群表示论得到的. 事实上, 群表示理论的应用不仅体现在纯数学领域, 它在理论物理学和化学等领域也有重要的应用 —— 我们将在最后一章进行讨论.

本书适合已经在大学阶段学过群论与线性代数的同学使用. 在本书的前两章我们给出了学习本书所需要的基础背景知识, 在本书的第 3~23 章我们通过模论方法介绍群表示理论. 尽管我们的介绍方法符合近世代数的发展方式, 但是书中的一些证明与其他的教材也会有所不同. 尽管书中的主要结论是十分优美的, 但是这些结论乍一看却让人有些摸不着头脑, 因此在本书中我们将采用尽可能浅显易懂的方式进行叙述.

我们需要强调的是, 学习群表示时将理论与实际应用相结合是十分重要的, 因此本书中包含了大量的例子以帮助读者理解相关理论. 本书的一大亮点在于我们对许多群的表示情况作了详细的分析. 在本书的第 28 章结尾我们给出所有阶数小于 32 的群、阶数至多为 p^4 的 p-群以及所有阶数小于 1000 的单群的特征标表.

在每一章的后面都附有一定量的习题, 并且在书末给出了所有习题的答案.

Dr Hans Liebeck 认真阅读了本书的手稿, 并且提出了宝贵的修改意见, 在此对他表示衷心的感谢.

目　　录

第1章　群与同态

这本书学习的是群论的一个方面, 所以我们对群的基础知识作简要陈述, 其中大部分的知识是我们已经知道的. 另外, 我们引入了一些例子将用来说明后面的理论, 比如说二面体群和对称群. 这一章主要简要概括抽象代数的基本知识点, 读者可以在其他任意一本关于基础群论的书中找到相关细节. 其中有一个或两个很少用到的结论是为章节后面的练习准备的, 有必要的话读者可以参见后面的解答.

群

群包含一个集合 G 及一个运算法则, 也就是 G 中的任意两个元素 g,h 运算的结果还是 G 中元素, 记为 gh; 而这个法则必须满足下面几条公理:

(1) 对于 G 中任意的 g,h,k, 有

$$(gh)k = g(hk);$$

(2) 存在一个元素 $e \in G$ 使得对任意的 $g \in G$ 有

$$eg = ge = g;$$

(3) 对任意的 $g \in G$, 存在一个元素 $g^{-1} \in G$ 使得

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

我们将这个法则与 G 中的元素结合形成作用在 G 上的乘积.

公理 (1) 说明乘积满足结合律; 公理 (2) 中元素 e 是 G 中的单位元; 公理 (3) 中的 g^{-1} 是 g 的逆元.

很容易看到, G 中只有一个单位元, 并且 G 中的每个元素 g 只有一个逆元. 通常我们记 G 的单位元为 1, 而不是 e.

元素 g 与其自身的乘积 gg, 记为 g^2; 类似地, 有 $g^3 = g^2g$, $g^{-2} = (g^{-1})^2$, 以此类推; 并有 $g^0 = 1$.

如果 G 中元素的个数是有限的, 我们称 G 为一个有限群; G 中元素的个数称为 G 的阶, 记为 $|G|$.

1.1　例子

(1) 令 n 为一个正整数, 并记全体复数为 $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ 中的 n 次单位根组成的集合, 以及复数上的普通乘法, 成为一个阶为 n 的群. 记 C_n为阶为 n 的循环群. 如果

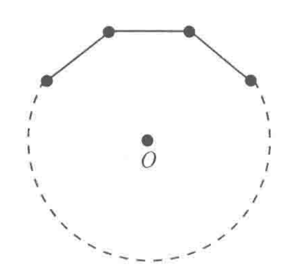
$a = e^{2\pi i/n}$, 那么

$$C_n = \{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\},$$

且 $a^n = 1$.

(2) 全体整数集合 $\mathbb{Z}$, 在普通加法下成为一个群.

(3) 令 n 为一个整数, 且 $n \geqslant 3$, 考虑正 n 边形上的旋转对称变换和反射对称变换.



它有 n 个旋转对称: 分别是 $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$, 其中 ρ_k 是关于中心 O 角度为 $2\pi k/n$ 的旋转. 同时也有 n 个反射对称: 是关于经过中心 O 和多边形顶点的直线对称, 或是经过中心 O 和边的中点的直线对称.

这 $2n$ 个旋转和反射在乘积复合作用下成为一个群 (取两个对称 f 和 g, 它们的乘积 fg 是"先用 f 作用, 再用 g 作用"). 这个群叫做**二面体群**, 其阶为 $2n$, 记为 D_{2n}.

令 A 为多边形的一个顶点. 记 b 为在经过 O 和 A 的直线的反射, 记 a 为旋转 ρ_1. 那么 n 个旋转就是

$$1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$$

(其中 1 是单位元, 是固定多边形不动的); n 个反射就是

$$b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b.$$

这样 D_{2n} 中的元素都是 a 的幂次与 b 的幂次的乘积一即 D_{2n} 是由 a 与 b 生成的.

经验证有

$$a^n = 1, b^2 = 1 \text{ 且 } b^{-1}ab = a^{-1}.$$

这些关系决定了群中任意两个元素的乘积. 举个例子, 我们有 $ba^j = a^{-j}b$ (利用关系式 $ba = a^{-1}b$), 因此

$$(a^ib)(a^jb) = a^iba^jb = a^ia^{-j}bb = a^{i-j}.$$

我们将所有的这些总结为下面的表达式:

$$D_{2n} = \langle a, b : a^n = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

(4) n 为一个正整数, 集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上所有的置换组成的集合, 在复合乘积作用下, 成为一个群. 这个群称为 n 次对称群, 记为 S_n, 其阶为 $n!$.

(5) 令 F 为 $\mathbb{R}$(实数集)或 $\mathbb{C}$(复数集). F 上的所有 $n\times n$ 可逆矩阵组成的集合, 在矩阵乘法下, 成为一个群. 这个群叫做 F 上次数为 n 的一般线性群, 记为 $GL(n,F)$. $GL(n,F)$ 为无限群, 它的单位元是单位矩阵, 记为 I_n 或简单地记为 I.

一个群 G 称为是交换群(或 Abel 群), 如果对于所有的 $g,h\in G$ 有 $gh=hg$. C_n 和 $\mathbb{Z}$ 是交换群, 而上面给出的其他大多数例子是非交换群.

子　　群

令 G 是一个群, G 的一个子集 H 称为一个子群, 如果在 G 下的乘积作用下 H 自己成为一个群. 我们用记号 $H\leqslant G$ 来表示 H 是 G 的一个子群.

很容易看出, 群 G 的一个子集 H 是一个子群当且仅当下面两个条件成立:

(1) $1\in H$, 且

(2) 如果 $h,k\in H$, 那么 $hk^{-1}\in H$.

1.2　例子

(1) 对任意一个群 G,$\{1\}$ 和 G 都是 G 的子群.

(2) 令 G 为一个群, 且 $g\in G$. 子集

$$\langle g\rangle=\{g^n:n\in\mathbb{Z}\}$$

是 G 的一个子群, 叫做 g 生成的循环子群. 如果对某个 $n\geqslant 1$ 有 $g^n=1$, 那么 $\langle g\rangle$ 是有限的. 在这种情况下, 令 r 为使 $g^r=1$ 成立的最小的正整数; 那么 r 恰好等于 $\langle g\rangle$ 中元素的个数, 事实上,

$$\langle g\rangle=\{1,g,g^2,\ldots,g^{r-1}\}.$$

我们称 r 是元素 g 的阶.

如果对某个 $g\in G$ 有 $G=\langle g\rangle$, 我们称 G 是一个循环群. 例 1.1 中的群 C_n 和 $\mathbb{Z}$ 是循环群.

(3) 令 G 为一个群且 $a,b\in G$. 定义 G 的子集 H 是包含由 a 的幂次与 b 的幂次的乘积得到所有元素, 也就是所有形如

$$a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2}\ldots a^{i_n}b^{j_n}$$

的元素, 其中 $i_k,j_k\in\mathbb{Z},1\leqslant k\leqslant n$. 那么 H 是 G 的一个子群; 我们称 H 是由 a 和 b 生成的子群, 记为

$$H=\langle a,b\rangle.$$

给定 G 的任意一个有限子集 S, 我们可以类似地定义由 S 生成的 G 的子群 $\langle S\rangle$.

这个构造给了我们找到给定群的子群的一种方法, 比如说一般线性群或对称群. 我们将会在下面的例子中来阐释这种构造, 在例 1.5 中会再次说明.

(4) 令 $G=GL(2,\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 2×2 可逆矩阵群, 令

$$A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $H=\langle A,B\rangle$ 为由 A 和 B 生成的 G 的子群. 可验证有

$$A^4=I,\quad A^2=B^2,\quad B^{-1}AB=A^{-1}.$$

利用第三个关系式, 我们可以得到 H 中的每个元素都可以写成 A^iB^j 的形式, 其中 i,j 为整数; 并且根据前两个关系式, 取 $0\leqslant i\leqslant 3, 0\leqslant j\leqslant 1$. 因此 H 至多有 8 个元素. 由于

$$A^iB^j\quad (0\leqslant i\leqslant 3, 0\leqslant j\leqslant 1)$$

是互不相同的, 所以 $|H|=8$.

群 H 称为四元数群, 其阶为 8, 记为 Q_8. 上面的三个关系式决定了 Q_8 中任意两个元素元素的乘积, 所以有下面的表示

$$Q_8=\langle A,B : A^4=I, A^2=B^2, B^{-1}AB=A^{-1}\rangle.$$

(5) 对称群 S_n 中的对换是一个置换, 对换是将 $1,2,\ldots,n$ 中的两个数字互换而保持其他 $n-2$ 个数字不变. S_n 中的任意一个置换 g 都可以表示成对换的乘积. 容易证明, 这样的 g 或者是奇数个对换的乘积, 或者是偶数个对换的乘积; 我们相应地称 g 为奇置换或偶置换. 子集

$$A_n=\{g\in S_n : g\text{是一个偶置换}\}$$

是 S_n 的子群, 称为 n 次交错群.

直　　积

下面我们描述根据已知的群得到一个新群的一种构造方法.

令 G 和 H 为群, 考虑

$$G\times H=\{(g,h) : g\in G, h\in H\}.$$

定义 $G\times H$ 上的乘积为

$$(g,h)(g',h')=(gg',hh'),$$

对任意的 $g, g' \in G, h, h' \in H$. 在这个乘积作用下, $G \times H$ 作成一个群, 称为 G 与 H 的直积.

更一般地, 设 $G_1, \ldots, G_r$ 为群, 那么直积 $G_1 \times \ldots \times G_r$ 为

$$\{(g_1, \ldots, g_r) : g_i \in G_i, 1 \leqslant i \leqslant r\},$$

以及乘法作用

$$(g_1, \ldots, g_r)(g_1', \ldots, g_r') = (g_1 g_1', \ldots, g_r g_r').$$

如果所有的群 G_i 都是有限的, 那么 $G_1 \times \ldots \times G_r$ 也是有限的, 且阶为 $|G_1| \ldots |G_r|$.

1.3　例子

群 $C_2 \times \ldots \times C_2$ (r 个) 的阶为 2^r, 且它的所有非单位元的元素的阶也是 2.

函　　数

从一个集合 G 到另外一个集合 H 的函数是将 G 中每个元素都唯一的对应到 H 中的元素. 在这本书里, 我们一般将函数从右作用 —— 即 g 在一个函数 ϑ 下的像记为 $g\vartheta$, 而不是 ϑg. 我们通常用记号 $\vartheta : G \to H$ 来表示 ϑ 是一个从 G 到 H 的函数. 用记号 $\vartheta : g \to h, g \in G, h \in H$ 来表示 $h = g\vartheta$.

一个函数 $\vartheta : G \to H$ 是可逆的, 如果存在一个函数 $\phi : H \to G$, 使得对任意的 $g \in G, h \in H$ 有

$$(g\vartheta)\phi = g, \quad (h\phi)\vartheta = h.$$

那么 ϕ 称为 ϑ 的逆, 记作 ϑ^{-1}. 一个从 G 到 H 的函数 ϑ 是可逆的当且仅当它既是单射(即由 $g_1\vartheta = g_2\vartheta, g_1, g_2 \in G$ 能得到 $g_1 = g_2$), 又是满射(即对任意的 $h \in H$ 存在 $g \in G$ 使得 $g\vartheta = h$). 一个可逆函数也称为一个双射.

同　　态

给定群 G 和 H, 那些从 G 到 H“保持群结构”的函数 —— 所谓的同态 —— 是很重要的.

如果 G 和 H 为群, 那么从 G 到 H 的一个同态是一个函数 $\vartheta : G \to H$ 满足

$$(g_1 g_2)\vartheta = (g_1\vartheta)(g_2\vartheta), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

一个可逆的同态叫做同构. 如果存在一个 G 到 H 的同构 ϑ, 则称 G 与 H 是同构的, 记为 $G \cong H$; 同样的, ϑ^{-1} 是 H 到 G 的同构, 所以 $H \cong G$.

下面的例子展示了一个常用来证明某个函数是同态的技巧.

1.4 例子

令 $G = D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, 并将 G 中的 $2n$ 个元素写为 a^ib^j 形式, 其中 $0 \leqslant i \leqslant n-1, 0 \leqslant j \leqslant 1$. 令 H 为任意一群, 假设 H 含有元素 x, y 满足

$$x^n = y^2 = 1, \quad y^{-1}xy = x^{-1}.$$

我们将证明函数 $\vartheta : G \to H$

$$\vartheta : a^ib^j \mapsto x^iy^j \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1, 0 \leqslant j \leqslant 1)$$

是一个同态.

假设 $0 \leqslant r \leqslant n-1, 0 \leqslant s \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant n-1, 0 \leqslant u \leqslant 1$. 那么

$$a^rb^sa^tb^u = a^ib^j,$$

其中 $0 \leqslant i \leqslant n-1, 0 \leqslant j \leqslant 1$, 另外, i 和 j 是重复使用关系式

$$a^n = b^2 = 1, \quad b^{-1}ab = a^{-1}$$

决定的. 由于 $x^n = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^{-1}$, 我们可以推出

$$x^ry^sx^ty^u = x^iy^j.$$

因此,

$$\begin{aligned}(a^rb^sa^tb^u)\vartheta &= (a^ib^j)\vartheta = x^iy^j = x^ry^sx^ty^u \\ &= (a^rb^s)\vartheta \cdot (a^tb^u)\vartheta,\end{aligned}$$

所以 ϑ 是一个同态.

我们现在用实例来展示例 1.4 中的技巧.

1.5 例子

令 $G = S_5$, 且 x, y 为 G 中的如下置换:

$$x = (12345), \quad y = (25)(34).$$

(这里我们采用通常的轮换记号—— 也就是, (12345) 代表置换 $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 1$, 以此类推.) 容易验证满足

$$x^5 = y^2 = 1, \quad y^{-1}xy = x^{-1}.$$

令 H 为 G 的子群 $\langle x, y\rangle$, 由上面的关系式, 有

$$H = \{x^i y^j : 0 \leqslant i \leqslant 4, 0 \leqslant j \leqslant 1\}$$

是一个阶为 10 的群.

现在

$$D_{10} = \langle a, b : a^5 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle.$$

由例 1.4, 函数 $\vartheta : D_{10} \to H$ 定义为

$$\vartheta : a^i b^j \mapsto x^i y^j \quad (0 \leqslant i \leqslant 4, 0 \leqslant j \leqslant 1)$$

是一个同态. 由于 ϑ 是可逆的, 所以是一个同构. 因此 $H = \langle x, y\rangle \cong D_{10}$.

陪　集

G 为一个群, H 为 G 的一个子群. 对 $x \in G$, G 的子集

$$Hx = \{hx : h \in H\}$$

称为 H 在 G 中的一个右陪集. H 在 G 中不同的右陪集形成对 G 一个分割或分划(也就是说, G 中的任意一个元素在且只能在一个陪集里).

现假设 G 是有限群, 令 $Hx_1, \ldots, Hx_r$ 为 H 在 G 里所有右陪集. 对任意的 i, 函数

$$h \mapsto hx_i \quad (h \in H)$$

是从 H 到 Hx_i 的一个双射, 并且 $|Hx_i| = |H|$. 由于

$$G = Hx_1 \cup \ldots \cup Hx_r, \quad 且$$
$$当 i \neq j 时, Hx_i \cap Hx_j 是空集,$$

我们推出

$$|G| = r|H|.$$

特别地, 我们有

1.6　拉格朗日定理

若 G 是一个有限群, H 是 G 的一个子群, 那么 $|H|$ 整除 $|G|$.

H 在 G 中的右陪集的个数 r, 称为 H 在 G 中的指数, 记为 $|G : H|$. 这样当 G 有限时,

$$|G : H| = |G|/|H|.$$

正 规 子 群

G 的一个子群 N 称为正规子群, 如果对任意的 $g \in G$ 有 $g^{-1}Ng = N$ 成立 (其中 $g^{-1}Ng = \{g^{-1}ng : n \in N\}$); 我们用 $N \lhd G$ 来表示 N 是 G 的一个正规子群.

假设 $N \lhd G$, 并且令 G/N 是 N 在 G 中右陪集的集合. 条件 $g^{-1}Ng = N$(对 G 的任意元素) 的重要性在于它可以用来证明对任意的 $g, h \in G$, 我们有

$$\{xy : x \in Ng, y \in Nh\} = Ngh.$$

因此我们可以定义 G/N 上的一个乘积

$$(Ng)(Nh) = Ngh, \quad \forall g, h \in G.$$

这使得 G/N 做成一个群, 叫做 G 模 N 的商群.

1.7 例子

(1) 对任意的群 G, 子群 $\{1\}$ 和 G 都是 G 的正规子群.

(2) 对 $n \geqslant 1$, 我们有 $A_n \lhd S_n$.如果 $n \geqslant 2$, 那么 A_n 在 S_n 里只有两个右陪集, 即

$$A_n = \{g \in S_n : g\text{为偶置换}\}, \quad \text{和}$$

$$A_n(12) = \{g \in S_n : g\text{为奇置换}\}.$$

这样 $|S_n : A_n| = 2$, 所以 $S_n/A_n \cong C_2$.

(3) 令 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle, N = \langle a^2\rangle = \{1, a^2\}$. 那么 $N \lhd G$ 且

$$G/N = \{N, Na, Nb, Nab\}.$$

由于 $(Na)^2 = (Nb)^2 = (Nab)^2 = N$, 有 $G/N \cong C_2 \times C_2$.

子群 $\langle a\rangle$ 在 G 中也是正规的, 但子群 $H = \langle b\rangle$ 在 G 中不是正规的, 因为 $b \in H$ 而 $a^{-1}ba = a^2b \notin H$.

单　　群

一个群 G 是单群, 如果 $G \neq \{1\}$ 并且 G 的正规子群只有 $\{1\}$ 和 G. 举个例子, 循环群 C_p 是一个单群, 其中 p 为一个素数. 在后面的章节里我们将会给出非交换单群的例子 —— 最小的是 A_5.

若一个有限群 G 不是单群, 那么 G 有一个正规子群 N 使得 N 和 G/N 的阶比 G 的阶小; 在某种意义上, G 是由 N 和 G/N 构建出来的. 用较小的群继续这个过程, 我们最终会看到 G 是由一个单群集合构造出来的.(这与每一个正整数都由它的素因子构造出来的类似.) 所以, 单群是学习有限群的基础.

核　与　像

最后, 我们将正规子群和商群与同态建立联系. 令 G, H 为群, 并假设 $\vartheta : G \to H$ 是一个同态, 我们定义 ϑ 的核为

(1.8)
$$\text{Ker}\vartheta = \{g \in G : g\vartheta = 1\}.$$

那么 $\text{Ker}\vartheta$ 是 G 的一个正规子群. ϑ 的像为

(1.9)
$$\text{Im}\vartheta = \{g\vartheta : g \in G\},$$

且 $\text{Im}\vartheta$ 是 H 一个子群.

下面的结果描述了 ϑ 的核与像是如何相关联的.

1.10　定理

设 G, H 为群, $\vartheta : G \to H$ 是一个同态. 那么

$$G/\text{Ker}\vartheta \cong \text{Im}\vartheta.$$

同构为函数

$$Kg \mapsto g\vartheta \quad (g \in G),$$

其中 $K = \text{Ker}\vartheta$.

1.11　例子

函数 $\vartheta : S_n \to C_2$ 为

$$\vartheta : g \mapsto \begin{cases} 1, & \text{若 } g \text{ 为偶置换}, \\ -1, & \text{若 } g \text{ 为奇置换}, \end{cases}$$

是一个同态. 我们有 $\text{Ker}\vartheta = A_n$, 且对 $n \geqslant 2, \text{Im}\vartheta = C_2$. 从例 1.7(2) 知 $S_n/A_n \cong C_2$, 这说明了定理 1.10.

第 1 章总结

1. 下面是几个群的例子:

$C_n = \langle a : a^n = 1 \rangle$,

$D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$,
$Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$,
$S_n = n$次对称群,
$A_n = n$次交错群,
$GL(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$上的 $n \times n$ 阶可逆矩阵群,
$G_1 \times \ldots \times G_r =$ 群 $G_1, \ldots, G_r$ 的直积.

2. G 的一个正规子群 N 是对任意的 $g \in G$ 有 $g^{-1}Ng = N$ 的 G 的一个子群. 商群 G/N 包含所有的右陪集 Ng $(g \in G)$, 并有乘法

$$(Ng)(Nh) = Ngh.$$

3. 同态 $\vartheta : G \to H$ 是一个对任意的 $g_1, g_2 \in G$ 有

$$(g_1g_2)\vartheta = (g_1\vartheta)(g_2\vartheta)$$

成立的函数. 核 $\mathrm{Ker}\vartheta$ 是 G 的正规子群, 像 $\mathrm{Im}\vartheta$ 是 H 的子群. 商群 $G/\mathrm{Ker}\vartheta$ 同构于 $\mathrm{Im}\vartheta$.

第 1 章习题

1. 证明若 G 为一个交换的单群, 那么 G 是素数阶的循环群.

2. 假设 G, H 为群, 其中 G 为单群, 且 $\vartheta : G \to H$ 为一个满同态. 说明 ϑ 是一个同构或 $H = \{1\}$.

3. 设 G 为 S_n 一个子群, 且 G 不含在 A_n 中. 证明 $G \cap A_n$ 是 G 的一个正规子群, 且 $G/(G \cap A_n) \cong C_2$.

4. 设

$$G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle, \quad 且$$

$$H = Q_8 = \langle c, d : c^4 = 1, c^2 = d^2, d^{-1}cd = c^{-1} \rangle.$$

(a) 设 x, y 为 S_4 中的置换

$$x = (12), \quad y = (34),$$

并且令 K 是 S_4 的子群 $\langle x, y \rangle$. 说明函数 $\phi : G \to K$ 和 $\psi : H \to K$,

$$\phi : a^r b^s \mapsto x^r y^s,$$

$$\psi : c^r d^s \mapsto x^r y^s \quad (0 \leqslant r \leqslant 3, 0 \leqslant s \leqslant 1)$$

均为同态. 并求出 $\mathrm{Ker}\phi$ 和 $\mathrm{Ker}\psi$.

(b) 令 X, Y 为 2×2 的矩阵

$$X=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

L 为 $GL(2,\mathbb{C})$ 的子群 $\langle X, Y\rangle$. 说明函数 $\lambda: G\to L$ 和 $\mu: H\to L$,

$$\lambda: a^r b^s \mapsto X^r Y^s,$$

$$\mu: c^r d^s \mapsto X^r Y^s \quad (0\leqslant r\leqslant 3, 0\leqslant s\leqslant 1)$$

中只有一个为同态. 证明这个同态是一个同构.

5. 若 m 为奇数, 证明 $D_{4m}\cong D_{2m}\times C_2$.

6. (a) 说明循环群的子群是循环群.

(b) 令 G 为有限循环群, n 为整除 $|G|$ 的正整数. 证明

$$\{g\in G: g^n=1\}$$

是 G 的一个阶为 n 的循环子群.

(c) 若 G 是一个有限循环群, x, y 为 G 中有相同阶数的元素, 说明 x 是 y 的某个幂次.

7. 说明非零复数集合在普通乘法下成为一个群. 证明这个群的每个有限子群都是循环群.

8. 说明每个偶数阶群含有一个阶为 2 的元素.

9. 找到 $GL(2,\mathbb{C})$ 中元素 A, B 使得 A 的阶为 8, B 的阶为 4, 有

$$B^2=A^4\text{且}B^{-1}AB=A^{-1}.$$

说明群 $\langle A, B\rangle$ 的阶为 16. (提示: 与例 (1.2(4)) 中的 Q_8 比较.)

10. 设 H 是 G 的一个子群, 且有 $|G:H|=2$. 证明 $H\lhd G$.

第 2 章　向量空间和线性变换

表示理论一个很吸引人的优点是它把数学中的两大主流 (即群论和线性代数) 结合在了一起. 为了便于参考, 我们把有关于向量空间、线性变换和矩阵的线性代数中的结果汇集在了一起, 这些以后会用到. 如果已经学过线性代数, 那么大多数的知识你都比较熟悉, 所以我们忽略证明. 最后一部分例外, 在这里我们讨论投射, 如果以前没有接触过投射也没有关系, 我们会详细地说明.

向 量 空 间

令 F 是 $\mathbb{R}$(实数集) 或者 $\mathbb{C}$(复数集). F 上的向量空间是这样的一个集合 V, 定义 V 中任意两个元素 u, v 的和是 V 中的元素 $u+v$, F 中的任意元素 λ 与 V 中的任意元素 v 的积是 V 中的一个元素 λv (后者叫做数乘运算). 并且, 这些运算必须满足:

(2.1) (a) V 在加法运算下是一个交换群;

(b) 对于 V 中的所有的 u, v 和 F 中的所有的 λ, μ 来说,

(1) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$,

(2) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$,

(3) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$,

(4) $1v = v$.

V 中的元素叫向量, F 中的元素叫数量. 我们把交换群 V 在加法运算下的单位元用 0 来表示.

2.2　例子

(1) 设 $\mathbb{R}^2$ 表示所有的有序对 (x, y) 组成的集合, 其中 x 和 y 是实数. 如下定义 $\mathbb{R}^2$ 上的加法和数乘:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

那么 $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间.

(2) 更一般的情况, 对于每个正整数 n 来说, 考虑行向量

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

其中 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 属于 F. 我们用 F^n 表示所有这样的行向量组成的集合, 如下定义 F^n 上的加法和数乘:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n),$$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

那么 F^n是 F 上的一个向量空间.

向量空间的基

令 $v_1, \ldots, v_n$ 是 F 上的一个向量空间 V 中的向量. 如果存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ 使得

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n,$$

那么我们就说 V 中的一个向量 v 是 $v_1, \ldots, v_n$ 的一个线性组合. 如果 V 中的每个向量都是 $v_1, \ldots, v_n$ 的一个线性组合, 那么我们就说向量 $v_1, \ldots, v_n$ 张成 V.

如果存在不全为 0 的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ 使得

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0,$$

那么我们就说 $v_1, \ldots, v_n$ 是线性相关的, 否则 $v_1, \ldots, v_n$ 是线性无关的.

如果向量 $v_1, \ldots, v_n$ 张成 V 并且它们线性无关, 则它们构成 V 的一组基.

在这本书中, 我们只考虑有限维的向量空间 V, 即像上面说的那样, V 有一组包含有限多个向量的基. 可以证明 V 的任意两组基有同样多的向量. V 的一组基中的向量的个数叫做 V 的维数, 记作 $\dim V$. 如果 $V = \{0\}$, 那么 $\dim V=0$. 如果 $\dim V=n$, 那么我们就说向量空间 V 是 n 维的.

2.3　例子

令 $V = F^n$. 那么

$$(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

是 V 的一组基, 所以 $\dim V=n$. 另一组基是

$$(1, 0, 0, \ldots, 0), (1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (1, 1, 1, \ldots, 1).$$

给定一个向量空间 V 的一组基 $v_1, \ldots, v_n$, V 中的每一个向量 v 都可以唯一的写成

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n,$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 F 中的元素. 因此向量 v 决定了数量 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. 除了 $V = \{0\}$ 这种情况以外, V 都有很多组基. 实际上, 下一个结论说明了任意线性无关的向量可以扩充成一组基.

(2.4) 如果 $v_1, \ldots, v_k$ 是 V 中的线性无关的向量, 那么存在 V 中的向量 $v_{k+1}, \ldots, v_n$, 使得 $v_1, \ldots, v_n$ 构成 V 的一组基.

子　空　间

F 上的一个向量空间 V 的一个子空间是 V 的子集, 并且这个子集在 V 的加法和数乘运算下构成一个向量空间. 所以 V 的一个子集 U 要想成为一个子空间, 以下条件是充分必要的:

(2.5) (1) $0 \in U$;

(2) 如果 $u, v \in U$, 那么 $u + v \in U$;

(3) 如果 $\lambda \in F$, 并且 $u \in U$, 那么 $\lambda u \in U$.

2.6 例子

(1) $\{0\}$和 V 都是 V 的子空间.

(2) 令 $u_1, \ldots, u_r$ 是 V 中的向量. 我们把 $u_1, \ldots, u_r$ 的所有的线性组合组成的集合定义成 $sp(u_1, \ldots, u_r)$; 也就是说

$$sp(u_1, \ldots, u_r) = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r : \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in F\}.$$

由 (2.5), $sp(u_1, \ldots, u_r)$ 是 V 的一个子空间, 而且它叫做由 $u_1, \ldots, u_r$ 张成的子空间.

注意到以下的事实是 (2.4) 的一个结果.

(2.7) 假设 U 是向量空间 V 的一个子空间. 那么 $\dim U \leqslant \dim V$. 并且有 $\dim U = \dim V$ 当且仅当 $U = V$.

子空间的直和

如果 $U_1, \ldots, U_r$ 是一个向量空间 V 的子空间, 那么和 $U_1 + \ldots + U_r$ 是如下定义的:

$$U_1 + \ldots + U_r = \{u_1 + \ldots + u_r : u_i \in U_i, 1 \leqslant i \leqslant r\}.$$

由 (2.5), $U_1 + \ldots + U_r$ 是 V 的一个子空间.

如果和 $U_1+\ldots+U_r$ 中的每一个元素可以唯一的写成 $u_1+\ldots+u_r$ 的形式, 其中 $u_i\in U_i, 1\leqslant i\leqslant r$, 那么我们把这个和叫做直和, 记作

$$U_1\oplus\ldots\oplus U_r.$$

2.8 例子

(1) 假设 $v_1,\ldots,v_n$ 是 V 的一组基, 并且对于 $1\leqslant i\leqslant n$ 来说, U_i 表示由 v_i 张成的子空间. 那么

$$V=U_1\oplus\ldots\oplus U_n.$$

(2) 令 U 是 V 的一个子空间, $v_1,\ldots,v_k$ 是 U 的一组基. 把 $v_1,\ldots,v_k$ 扩充成 V 的一组基 $v_1,\ldots,v_n$(见 (2.4)), 令 $W=sp(v_{k+1},\ldots,v_n)$. 那么

$$V=U\oplus W.$$

从这种构造方式我们知道, 存在无限多个子空间 W 使得 $V=U\oplus W$, 除非 U 是 $\{0\}$ 或者 V.

下面这个结果在处理两个子空间的直和问题时会非常有用. 如果证明有困难, 请参照习题 2.3 和 2.4 的解答.

(2.9) 假设 $V=U+W$, 并且 $u_1,\ldots,u_r$ 是 U 的一组基, $w_1,\ldots,w_s$ 是 W 的一组基. 那么下列的三个条件是等价的:

(1) $V=U\oplus W$,

(2) $u_1,\ldots,u_r,w_1,\ldots,w_s$ 是 V 的一组基,

(3) $U\cap W=\{0\}$.

我们的下一个结果涉及了几个子空间的直和, 可以由直和的定义通过归纳立刻得到.

(2.10) 假设 $U,W,U_1,\ldots,U_a,W_1,\ldots,W_b$ 是一个向量空间 V 的子空间. 如果 $V=U\oplus W$, 并且

$$U=U_1\oplus\ldots\oplus U_a,\quad W=W_1\oplus\ldots\oplus W_b,$$

那么

$$V=U_1\oplus\ldots\oplus U_a\oplus W_1\oplus\ldots\oplus W_b.$$

我们现在介绍向量空间的一种构造方法, 这和构造群的直积是相似的.

令 $U_1,\ldots,U_r$ 是 F 上的向量空间, 令

$$V=\{(u_1,\ldots,u_r):u_i\in U_i, 1\leqslant i\leqslant r\}.$$

按照如下方式定义 V 上的加法和数乘：对于 U_i 中的所有的 u_i, u_i' 和 F 中的所有的 λ 来说, 令

$$(u_1, \ldots, u_r) + (u_1', \ldots, u_r') = (u_1 + u_1', \ldots, u_r + u_r'),$$

$$\lambda(u_1, \ldots, u_r) = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_r).$$

有了这些定义, V 是 F 上的一个向量空间. 如果对于 $1 \leqslant i \leqslant r$ 来说, 令

$$U_i' = \{(0, \ldots, u_i, \ldots, 0) : u_i \in U_i\}$$

(其中 u_i 在第 i 个位置), 那么立刻得到

$$V = U_1' \oplus \ldots \oplus U_r'.$$

我们把 V 叫做 $U_1, \ldots, U_r$ 的外直和, 如果忽略符号的使用, 那么可以写成

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r.$$

线 性 变 换

令 V 和 W 是 F 上的向量空间. 从 V 到 W 的一个线性变换是指一个函数 $\vartheta : V \to W$, 对于所有的 $u, v \in V, \lambda \in F$ 来说, 满足:

$$(u + v)\vartheta = u\vartheta + v\vartheta,$$

$$(\lambda v)\vartheta = \lambda(v\vartheta).$$

就像一个群同态保持群的乘法运算一样, 一个线性变换保持加法和数乘运算.

注意到如果 $\vartheta : V \to W$ 是一个线性变换, $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的一组基, 那么对于 F 中的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 来说, 有

$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)\vartheta = \lambda_1(v_1\vartheta) + \ldots + \lambda_n(v_n\vartheta).$$

因此, ϑ 由它在一组基上的作用决定. 并且给定 V 的任意一组基 $v_1, \ldots, v_n$ 和 W 中的任意 n 个向量 $w_1, \ldots, w_n$, 存在唯一的线性变换 $\phi : V \to W$ 使得对于所有的 i 来说, 有 $v_i\phi = w_i$ 成立, 这个线性变换 ϕ 是由如下式子给出:

$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)\phi = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n.$$

我们有时用这种方式建立一个线性变换 $\phi : V \to W$, 通过确定 ϕ 在 V 的一组基上的值, 然后把 ϕ 的作用扩充成线性的.

核　和　像

假设 $\vartheta : V \to W$ 是一个线性变换. ϑ 的核(记作 $\mathrm{Ker}\vartheta$) 和 ϑ 的像 (记作 $\mathrm{Im}\vartheta$) 是按照如下方式定义:

(2.11) $$\mathrm{Ker}\vartheta = \{v \in V : v\vartheta = 0\}, \quad \mathrm{Im}\vartheta = \{v\vartheta : v \in V\}.$$

由 (2.5), 我们很容易得到 $\mathrm{Ker}\vartheta$ 是 V 的一个子空间, $\mathrm{Im}\vartheta$ 是 W 的一个子空间. 它们的维数之间的联系是由如下的等式确立的, 这个等式就是著名的秩–零化度定理:

(2.12) $$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\vartheta) + \dim(\mathrm{Im}\vartheta).$$

2.13　例子

(1) 如果 $\vartheta : V \to W$ 的定义是对于所有的 $v \in V$, 有 $v\vartheta = 0$, 那么 ϑ 是一个线性变换, 并且有

$$\mathrm{Ker}\vartheta = V, \quad \mathrm{Im}\vartheta = \{0\}.$$

(2) 如果 $\vartheta : V \to V$ 的定义是对于所有的 $v \in V$, 有 $v\vartheta = 3v$, 那么 ϑ 是一个线性变换, 并且有

$$\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}, \quad \mathrm{Im}\vartheta = V.$$

(3) 如果 $\vartheta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 是按照如下方式定义的, 对于所有的 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 有

$$(x, y, z)\vartheta = (x + 2y + z, -y + 3z),$$

那么 ϑ 是一个线性变换, 有

$$\mathrm{Ker}\vartheta = sp((7, -3, -1)), \quad \mathrm{Im}\vartheta = \mathbb{R}^2,$$

所以 $\dim(\mathrm{Ker}\vartheta) = 1, \dim(\mathrm{Im}\vartheta) = 2$.

可逆的线性变换

令 V 和 W 是 F 上的向量空间. 一个从 V 到 W 的线性变换 ϑ 是单射当且仅当 $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$, 因此 ϑ 是可逆的当且仅当 ϑ 是满射且 $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$. 可以证明一个可逆的线性变换的逆也是一个线性变换 (见习题 2.1).

如果存在一个从 V 到 W 的可逆的线性变换, 那么 V 和 W 叫做同构的向量空间. 应用 (2.12), 我们得到同构的向量空间有相同的维数. 再由 (2.7) 我们得到下面的结论 (见习题 2.2).

(2.14)　令 ϑ 是一个从 V 到 V 本身的线性变换. 那么下面三个条件是等价的:

(1) ϑ 是可逆的;

(2) $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$;

(3) $\mathrm{Im}\vartheta = V$.

自 同 态

一个从向量空间 V 到 V 自身的线性变换叫做 V 的一个自同态.

假设 ϑ 和 ϕ 是 V 的自同态, $\lambda \in F$. 我们按照如下方式定义从 V 到 V 的函数 $\vartheta + \phi, \vartheta\phi$ 和 $\lambda\vartheta$, 对于所有的 $v \in V$ 有

(2.15) $$v(\vartheta + \phi) = v\vartheta + v\phi, v(\vartheta\phi) = (v\vartheta)\phi, v(\lambda\vartheta) = \lambda(v\vartheta).$$

那么 $\vartheta + \phi, \vartheta\phi$ 和 $\lambda\vartheta$ 是 V 的自同态. 我们把 $\vartheta\vartheta$ 记作 ϑ^2.

2.16 例子

(1) 如下定义的恒等函数 1_V:

$$1_V : v \mapsto v \quad (v \in V)$$

是 V 的一个自同态. 如果 ϑ 是 V 的一个自同态, 那么对于所有的 $\lambda \in F, \vartheta - \lambda 1_V$ 也是 V 的一个自同态. 注意到

$$\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) = \{v \in V : v\vartheta = \lambda v\}.$$

(2) 令 $V = \mathbb{R}^2$, ϑ 和 ϕ 是如下定义的从 V 到 V 的函数:

$$(x, y)\vartheta = (x + y, x - 2y),$$
$$(x, y)\phi = (x - 2y, -2x + 4y).$$

那么 ϑ 和 ϕ 是 V 的自同态, 并且 $\vartheta + \phi, \vartheta\phi, 3\vartheta$ 和 ϑ^2 由如下式子给出:

$$(x, y)(\vartheta + \phi) = (2x - y, -x + 2y),$$
$$(x, y)(\vartheta\phi) = (-x + 5y, 2x - 10y),$$
$$(x, y)(3\vartheta) = (3x + 3y, 3x - 6y),$$
$$(x, y)(\vartheta^2) = (2x - y, -x + 5y).$$

矩 阵

令 V 是 F 上的一个向量空间, ϑ 是 V 的一个自同态. 假设 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的一组基, 我们把它叫做 $\mathscr{B}$, 那么存在 F 中的 $a_{ij} (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ 使得对于所有的 i 来说, 有

$$v_i\vartheta = a_{i1}v_1 + \ldots + a_{in}v_n.$$

2.17　定义

$n \times n$ 阶的矩阵 (a_{ij}) 叫做 ϑ 在基 $\mathscr{B}$ 下的矩阵, 用 $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ 来表示.

2.18　例子

(1) 如果 $\vartheta = 1_V$(使得对于所有的 $v \in V$ 有 $v\vartheta = v$), 那么对于所有的 V 的基 $\mathscr{B}$ 来说, $[\vartheta]_{\mathscr{B}} = I_n$, 其中 I_n 表示 $n \times n$ 阶的单位阵.

(2) 令 $V = \mathbb{R}^2, \vartheta : (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y)$ 是 V 的自同态. 若 $\mathscr{B}$ 是 V 的基 (1,0),(0,1) 并且 $\mathscr{B}'$ 是 V 的基 (1,0),(1,1), 那么

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad [\vartheta]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

如果我们想要表示一个矩阵 A 中的元素是来自于 F 的, 那么就说 A 是 F 上的一个矩阵.

给定两个 F 上的 $m \times n$ 阶的矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$, 它们的和 $A + B$ 是 F 上的 $m \times n$ 阶的矩阵, 对于所有的 i, j 来说, 其 ij-元是 $a_{ij} + b_{ij}$; 对于所有的 $\lambda \in F$ 来说, 矩阵 λA 是 F 上的 $m \times n$ 阶的矩阵, 其 ij-元是 $\lambda \cdot a_{ij}$.

我们知道, 两个矩阵的积是用一种不那么明显的方式定义的. 给定一个 $m \times n$ 阶的矩阵 $A = (a_{ij})$ 和一个 $n \times p$ 阶的矩阵 $B = (b_{ij})$, 它们的积 AB 是一个 $m \times p$ 阶的矩阵, 其 ij-元是

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

2.19　例子

令

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

那么

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -13 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

我们期望两个自同态的和或积的矩阵 (在某组基下) 与它们分别的自同态的矩阵的运算有关.

(2.20)　假设 $\mathscr{B}$ 是向量空间 V 的一组基, ϑ 和 ϕ 是 V 的自同态. 那么

$$[\vartheta + \phi]_{\mathscr{B}} = [\vartheta]_{\mathscr{B}} + [\phi]_{\mathscr{B}},$$

$$[\vartheta\phi]_{\mathscr{B}} = [\vartheta]_{\mathscr{B}}[\phi]_{\mathscr{B}}.$$

同样, 对于所有的数 λ 来说, 有

$$[\lambda\vartheta]_{\mathscr{B}} = \lambda[\vartheta]_{\mathscr{B}}.$$

我们已经在 (2.17) 中说明了在给定 V 的一组基的情况下, 如何从一个向量空间 V 的一个自同态得到一个矩阵. 反过来, 即用一个矩阵去定义一个自同态是很容易的. 我们来关注一个特殊的方式. 假设 A 是 F 上的一个 $n \times n$ 阶的矩阵, 令 $V = F^n$, 即行向量 $(x_1, \ldots, x_n)$ 组成的向量空间, 其中 $x_i \in F$. 那么对于 V 中所有的 v 来说, 矩阵积 vA 仍然在 V 中. 下面的结论很容易证明.

(2.21) 如果 A 是一个 F 上的 $n \times n$ 阶的矩阵, 那么下面函数是 F^n 的一个自同态:

$$v \mapsto vA \quad (v \in F^n).$$

2.22 例子

令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

那么 A 给出了 F^2 的一个自同态 ϑ, 其中

$$(x, y)\vartheta = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (x + 3y, -x + 2y).$$

可逆矩阵

如果存在一个 $n \times n$ 阶的矩阵 B 使得 $AB = BA = I_n$, 那么这个 $n \times n$ 阶的矩阵 A 是可逆的. 这样的一个矩阵如果存在则唯一. 它叫做 A 的逆, 记作 A^{-1}. 把 A 的行列式记作 $\det A$. 那么 A 可逆的一个充分必要条件是 $\det A \neq 0$.

可逆自同态和可逆矩阵之间的联系是显然的, 由 (2.20) 得到: 给定 V 的一组基 $\mathscr{B}$, V 的一个自同态 ϑ 是可逆的当且仅当矩阵 $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ 是可逆的.

当我们把一个向量空间的两组基联系在一起的时候我们会用到可逆矩阵. 一个可逆矩阵把一组基转化成另一组基, 并且这个矩阵用来描述一个自同态的矩阵由基决定的方式. 这些结论具体的意义会在在下面的定义 (2.23) 和结论 (2.24) 中说明.

2.23 定义

令 $v_1, \ldots, v_n$ 是向量空间 V 的一组基 $\mathscr{B}$, 令 $v_1', \ldots, v_n'$ 是向量空间 V 的一组基 $\mathscr{B}'$. 那么存在某些 t_{ij}, 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$ 来说有

$$v_i' = t_{i1}v_1 + \ldots + t_{in}v_n.$$

$n \times n$ 阶的矩阵 $T = (t_{ij})$ 是可逆的, 叫做从 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}'$ 的基变换矩阵.

T 的逆叫做从 $\mathscr{B}'$ 到 $\mathscr{B}$ 的过渡矩阵.

(2.24)　如果 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}'$ 是 V 的基, ϑ 是 V 的一个自同态, 那么

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[\vartheta]_{\mathscr{B}'}T,$$

其中 T 是从 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}'$ 的过渡矩阵.

2.25　例子

假设 $V = \mathbb{R}^2$. 令 $\mathscr{B}$:(1,0),(0,1) 和 $\mathscr{B}'$:(1,0),(1,1) 是 V 的两组基. 那么

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

如果 ϑ 是 V 的一个自同态

$$\vartheta : (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y).$$

像例 2.18(2) 那样, 有

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}[\vartheta]_{\mathscr{B}'}T.$$

特　征　值

令 V 是 F 上的一个 n 维向量空间, ϑ 是 V 的一个自同态. 如果存在 V 中的非零向量 v 使得 $v\vartheta = \lambda v$, 那么 λ 叫做 ϑ 的一个特征值. 这样的一个向量 v 叫做 ϑ 的一个特征向量.

因此 λ 是 ϑ 的一个特征值当且仅当 $\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) \neq \{0\}$ 当且仅当 $\vartheta - \lambda 1_V$ 不是可逆的. 因此, 如果 $\mathscr{B}$ 是 V 的一组基, 那么 ϑ 的特征值是满足下列等式的那些 F 中的 λ:

$$\det([\vartheta]_{\mathscr{B}} - \lambda I_n) = 0.$$

解这个方程涉及找出一个 n 次多项式的根. 因为每个复系数的非常数多项式在复数域中至少有一个根, 我们得到以下结果.

(2.26)　令 V 是复数域上的一个非零向量空间, ϑ 是 V 的一个自同态. 那么 ϑ 有一个特征值.

2.27　例子

(1) 令 $V = \mathbb{C}^2$, ϑ 是如下方式给出的 V 的一个自同态:

$$(x, y)\vartheta = (-y, x).$$

如果 $\mathscr{B}$ 是 V 的一组基 (1,0),(0,1), 那么

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有 $\det([\vartheta]_{\mathscr{B}} - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$, 所以 $i, -i$ 是 ϑ 的特征值. 相应的特征向量是 $(1, -i), (1, i)$. 注意到如果 $\mathscr{B}'$ 是 V 的基 $(1, -i), (1, i)$, 那么

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

(2) 令 $V = \mathbb{R}^2$, ϑ 是如下给出的一个自同态:

$$(x, y)\vartheta = (-y, x).$$

这次, V 是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间, 并且 ϑ 在 $\mathbb{R}$ 中没有特征值. 因此在 (2.26) 中把 F 定义成 $\mathbb{C}$ 上.

对于一个 F 上的 $n \times n$ 阶的矩阵 A, 如果存在 F^n 中的某个非零行向量 v 有 $vA = \lambda v$ 成立, 那么我们就说 F 中的 λ 是 A 的一个特征值. A 的特征值是那些满足如下式子的 F 中的 λ:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

2.28 例子

给定一个 $n \times n$ 阶的矩阵 $A = (a_{ij})$, 如果对于任意的 i, j 并且 $i \neq j$ 有 $a_{ij} = 0$, 那么就说这个矩阵是对角的. 我们把这个矩阵写成下列形式

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

这表明了对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 来说, $a_{ii} = \lambda_i$. 对这个对角阵 A 来说, 特征值是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

投　　射

如果一个向量空间 V 是两个子空间 U, W 的直和, 那么可以通过表达式 $V = U \oplus W$ 建立 V 的一个特殊的自同态.

2.29 命题

假设 $V = U \oplus W$. 对于所有的 $u \in U, w \in W$, 把 $\pi : V \to V$ 定义为

$$(u + w)\pi = u.$$

那么 π 是 V 的一个自同态. 并且有

$$\mathrm{Im}\pi = U, \quad \mathrm{Ker}\pi = W, \quad \pi^2 = \pi.$$

证明　因为 V 中的每个向量有一个唯一的分解表达式: $u+w, u \in U, w \in W$, 所以 π 是 V 上的一个函数.

令 $v \in V, v' \in V$. 那么存在 $u, u' \in U, w, w' \in W$ 使得 $v = u + w, v' = u' + w'$. 有

$$\begin{aligned}(v+v')\pi &= (u+u'+w+w')\pi \\ &= u+u' \\ &= (u+w)\pi + (u'+w')\pi \\ &= v\pi + v'\pi.\end{aligned}$$

同时, 对于 $\lambda \in F$,

$$(\lambda v)\pi = (\lambda u + \lambda w)\pi = \lambda u = \lambda(v\pi).$$

因此, π 是 V 的一个自同态.

我们很清楚地看到 $\mathrm{Im}\pi \subseteq U$, 又因为对于 $u \in U$, 有 $u\pi = u$, 所以有 $\mathrm{Im}\pi = U$①. 同样,

$$(u+w)\pi = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \Longleftrightarrow u + w \in W,$$

因此, $\mathrm{Ker}\pi = W$.

最后,

$$(u+w)\pi^2 = u\pi = u = (u+w)\pi,$$

因此, $\pi^2 = \pi$. 证毕.

2.30　定义

π 是向量空间 V 的一个自同态, 如果满足 $\pi^2 = \pi$, 那么把 π 叫做 V 的一个投射.

2.31　例子

$\mathbb{R}^2$ 的一个自同态

$$(x, y) \mapsto (2x + 2y, -x - y)$$

是一个投射.

下面说明每个投射可以用一个直和来建立, 就像命题 2.29 中说的那样.

① 原书为"$\mathrm{Im} = U$", 译者修正为"$\mathrm{Im}\pi = U$".

2.32　命题

假设 π 是向量空间 V 的一个投射. 那么

$$V = \mathrm{Im}\pi \oplus \mathrm{Ker}\pi.$$

证明　如果 $v \in V$, 那么 $v = v\pi + (v - v\pi)$. 我们很容易地看到第一项 $v\pi \in \mathrm{Im}\pi$; 第二项 $v - v\pi \in \mathrm{Ker}\pi$, 这是因为

$$(v - v\pi)\pi = v\pi - v\pi^2 = v\pi - v\pi = 0.$$

这表明 $V = \mathrm{Im}\pi + \mathrm{Ker}\pi$.

现在假设 $v \in \mathrm{Im}\pi \cap \mathrm{Ker}\pi$. 因为 $v \in \mathrm{Im}\pi$, 所以存在 $u \in V$ 使得 $v = u\pi$. 因此

$$v\pi = u\pi^2 = u\pi = v.$$

因为 $v \in \mathrm{Ker}\pi$, 我们得到 $v = v\pi = 0$. 因此

$$\mathrm{Im}\pi \cap \mathrm{Ker}\pi = \{0\},$$

再由 (2.9) 可以得到 $V = \mathrm{Im}\pi \oplus \mathrm{Ker}\pi$. 证毕.

2.33　例子

如果 $\pi : (x, y) \mapsto (2x + 2y, -x - y)$ 是在例 2.31 中出现的 $\mathbb{R}^2$ 上的一个投射, 那么

$$\mathrm{Im}\pi = \{(2x, -x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathrm{Ker}\pi = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

第 2 章总结

1. 我们考虑的所有的向量空间都是 F 上有限维的向量空间, 其中 $F = \mathbb{C}$ 或 $F = \mathbb{R}$. 例如, F^n 是行向量 $(x_1, \ldots, x_n)$ 的集合, 其中 $x_i \in F$, 并且有 $\dim F^n = n$.

2. $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$, 其中每个 U_i 是 V 的子空间, V 中的每个元素 v 的表示 $v = u_1 + \ldots + u_r (u_i \in U_i)$ 是唯一的. 同时有 $V = U \oplus W \Longleftrightarrow V = U + W$ 且 $U \cap W = \{0\}$.

3. 对于 $u, v \in V, \lambda \in F$, 一个线性变换 $\vartheta : V \to W$ 满足

$$(u + v)\vartheta = u\vartheta + v\vartheta, \quad (\lambda v)\vartheta = \lambda(v\vartheta).$$

$\mathrm{Ker}\vartheta$ 是 V 的一个子空间, $\mathrm{Im}\vartheta$ 是 W 的一个子空间, 并且有

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\vartheta) + \dim(\mathrm{Im}\vartheta).$$

4. 一个线性变换 $\vartheta : V \to W$ 是可逆的 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$ 且 $\mathrm{Im}\vartheta = W$.

5. 给定 n 维向量空间 V 的一组基 $\mathscr{B}$, 存在 V 的自同态 ϑ 和 F 上的 $n \times n$ 阶矩阵 $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ 的一个对应关系. 给定 V 的两组基 $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ 和 V 的一个自同态 ϑ, 存在一个可逆矩阵 T 使得

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[\vartheta]_{\mathscr{B}'}T.$$

6. 一个自同态 ϑ 的特征值满足 $v\vartheta = \lambda v$, 其中 v 是 V 中的某个非零向量.

7. V 的一个投射是满足 $\pi^2 = \pi$ 的自同态 π.

第 2 章习题

1. 证明如果 V, W 是向量空间, $\vartheta : V \to W$ 是可逆的线性变换, 那么 ϑ^{-1} 是一个线性变换.

2. 假设 ϑ 是向量空间 V 是的一个自同态. 证明下面结论是等价的:

(1) ϑ 是可逆的;

(2) $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$;

(3) $\mathrm{Im}\vartheta = V$.

3. 令 U, W 是向量空间 V 的子空间. 证明 $V = U \oplus W \Longleftrightarrow V = U + W$ 且 $U \cap W = \{0\}$.

4. 令 U, W 是向量空间 V 的子空间. 假设 $u_1, \ldots, u_r$ 是 U 的一组基, $w_1, \ldots, w_s$ 是 W 的一组基. 证明 $V = U \oplus W \Longleftrightarrow u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ 是 V 的一组基.

5. (a) 令 U_1, U_2, U_3 是向量空间 V 的子空间, 并且有 $V = U_1 + U_2 + U_3$. 证明

$$\begin{aligned} & V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \\ & \Longleftrightarrow U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_2 \cap (U_1 + U_3) = U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}. \end{aligned}$$

(b) 举出一个向量空间 V 的例子, 这个 V 有三个子空间 U_1, U_2, U_3 使得 $V = U_1 + U_2 + U_3$ 并且有

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\},$$

但是 $V \neq U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

6. 令 $U_1, \ldots, U_r$ 是向量空间 V 的子空间, 并且有 $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$. 证明

$$\mathrm{dim}V = \mathrm{dim}U_1 + \ldots + \mathrm{dim}U_r.$$

7. 举出一个向量空间 V 的例子, 这个 V 有自同态 ϑ 和 ϕ 使得 $V = \mathrm{Im}\vartheta \oplus \mathrm{Ker}\vartheta$, 但是 $V \neq \mathrm{Im}\phi \oplus \mathrm{Ker}\phi$.

8. 令 V 是一个向量空间, ϑ 是 V 的一个自同态. 证明 ϑ 是一个投射 $\Longleftrightarrow$ 存在 V 的一组基 $\mathscr{B}$ 使得 $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ 是对角阵, 并且所有的对角元素是 1 或 0.

9. 假设 ϑ 是向量空间 V 的一个自同态, 并且有 $\vartheta^2 = 1_V$. 证明 $V = U \oplus W$, 其中

$$U = \{v \in V : v\vartheta = v\}, \quad W = \{v \in V : v\vartheta = -v\}.$$

证明 V 有一组基 $\mathscr{B}$ 使得 $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ 是对角阵, 并且所有的对角元素等于 $+1$ 或 -1.

第3章 群 表 示

群 G 的表示指的是将群看做是矩阵形成的群. 准确地说, 群的表示即为从群 G 到一般线性群的同态. 下面将详细论述其思想, 并且给出一些群表示的例子. 同时, 我们还介绍了等价表示和群表示的核的相关内容.

表 示

令 G 为一个群, F 为实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$. 并且 $GL(n,F)$ 如第 1 章所述表示数域 F 上的 $n\times n$ 可逆矩阵全体所形成的群.

3.1 定义

群 G 在数域 F 上的表示指的是 G 到 $GL(n,F)$ 上的一个同态映射 ρ, 其中整数 n 为这个表示的次数.

因此, 由上面定义可知, 如果 ρ 是 G 到 $GL(n,F)$ 上的映射, 那么 ρ 是一个群表示当且仅当

$$(gh)\rho=(g\rho)(h\rho),\quad \text{对于所有的}\ \ g,h\in G.$$

由于群表示是一个同态, 故对于每一群表示 $\rho:G\to GL(n,F)$, 可以得到

$$1\rho=I_n,\quad \text{和}$$

$$g^{-1}\rho=(g\rho)^{-1},\quad \text{对于所有的}\ g\in G,$$

其中 I_n 表示的是 $n\times n$ 的单位矩阵.

3.2 例子

(1) 令 G 代表二面体群 $D_8=\langle a,b:a^4=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$. 定义矩阵 A 和 B 为

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

通过验证可知

$$A^4=B^2=I,\quad B^{-1}AB=A^{-1}.$$

因此可知由下面的对应关系

$$\rho : a^i b^j \mapsto A^i B^j \quad (0 \leqslant i \leqslant 3, 0 \leqslant j \leqslant 1)$$

给定的映射 (见例1.4) $\rho : G \to GL(2, F)$ 是 D_8 在 F 上的一个表示, 且表示的次数是 2.

对于 D_8 中的每一个元素 g, 它们的矩阵表示如下表:

g	1	a	a^2	a^3
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

g	b	ab	a^2b	a^3b
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) 令 G 表示任意的群. 定义映射 $\rho : G \to GL(n, F)$ 为

$$g\rho = I_n, \quad \text{对所有的} g \in G,$$

其中 I_n 表示 $n \times n$ 的单位矩阵. 从而有

$$(gh)\rho = I_n = I_n I_n = (g\rho)(h\rho),$$

其中 $g,h \in G$, 因此 ρ 是群 G 的一个表示. 这个结论表明了每一个群都有任意次数的表示.

等 价 表 示

下面给出将一个群表示转化为另一个群表示的方法.

令 $\rho : G \to GL(n, F)$ 为群 G 的一个表示, 而 T 是 F 上的 $n \times n$ 可逆矩阵. 根据矩阵论的知识可知, 对于任意的 $n \times n$ 矩阵 A 和 B, 有下列等式成立:

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = T^{-1}(AB)T.$$

根据这个等式我们可以通过 ρ 得到群 G 的一个新的表示 σ; 其中 σ 的定义为

$$g\sigma = T^{-1}(g\sigma)T, \quad \text{对于所有的} g \in G.$$

因此对于所有的 $g,h \in G$, 有

$$\begin{aligned}(gh)\sigma &= T^{-1}((gh)\rho)T \\ &= T^{-1}((g\rho)(h\rho))T \\ &= T^{-1}(g\rho)T \cdot T^{-1}(h\rho)T \\ &= (g\sigma)(h\sigma),\end{aligned}$$

从而由上面等式可知 σ 是群 G 的一个表示.

3.3 定义

令 $\rho: G \to GL(m,F)$ 和 $\sigma: G \to GL(n,F)$ 是群 G 在 F 上的两个表示. 称表示 ρ 与 σ 等价, 如果 $n = m$ 并且存在一个 $n \times n$ 的可逆矩阵 T 使得对于所有的 $g \in G$,

$$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T.$$

注意对于群 G 在 F 上的所有表示 ρ, σ, τ 有 (见习题 3.4):

(1) ρ 与 ρ 等价;

(2) 如果 ρ 与 σ 等价, 那么 σ 也和 ρ 等价.

(3) 如果 ρ 与 σ 等价, σ 与 τ 等价, 那么 ρ 也与 τ 等价.

换句话说, 群表示的等价是一个等价关系.

3.4 例子

(1) 假设群 $G=D_8=\langle a,b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, 表示 ρ 如例 3.2(1) 所示. 令 $a\rho = A$, $b\rho = B$, 那么有

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

假定 F 为 $\mathbb{C}$, 并且定义矩阵 T 为

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

那么

$$T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

实际上, 我们选择了特殊构造的矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为一个对角矩阵, $T^{-1}BT$ 为一个反对角矩阵, 即

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

从而得到了群 D_8 的一个新的表示 σ 满足:

$$a\sigma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

并且表示 ρ 与 σ 等价.

(2) 假设群 $G=C_2=\langle a : a^2 = 1\rangle$ 并且令

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

经过验证可知 $A^2 = I$. 因此 $\rho : 1 \mapsto I, a \mapsto A$ 是群 G 的一个表示. 如果有

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

那么

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

从而得到了群 G 的一个新的表示 σ, 它的定义如下:

$$1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

并且表示 σ 和 ρ 等价.

对于群表示 ρ, 有两种简单的情形, 使得与 ρ 等价的表示只有 ρ 自身; 它们分别是 ρ 的次数为 1 的表示, 以及表示 $g\rho = I_n$ 对于所有的 $g \in G$. 然而在一般情况下, 与 ρ 等价的表示有很多, 并不唯一.

表 示 的 核

最后我们讨论表示 ρ: $G \to GL(n, F)$ 的核. 由定义 1.8 可知, 它是由 G 中在 ρ 的作用下变为单位矩阵的所有元素组成, 即

$$\text{Ker}\rho = \{g \in G : g\rho = I_n\}.$$

注意 $\text{Ker}\rho$ 是群 G 的正规子群.

正如下面定义中的情形, 群 G 的表示 ρ 的核可能是整个群 G.

3.5　定义

表示 ρ: $G \to GL(1,F)$ 称为是群 G 的一个平凡表示, 如果有

$$g\rho = (1), \quad \text{对于所有的} g \in G.$$

换句话说, 群 G 的平凡表示指的是把 G 中的元素都变为 1×1 的单位矩阵的群表示. 然而我们特别感兴趣的是那些核是群 G 的单位元组成的子群的表示.

3.6　定义

表示 $\rho : G \to GL(n,F)$ 称为是群 G 的一个忠实表示, 如果 $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$; 即群 G 中的单位元是唯一满足 $g\rho = I_n$ 的元素 g.

3.7　命题

有限群 G 的一个表示 ρ 称为是群 G 的一个忠实表示当且仅当 $\mathrm{Im}\rho$ 与群 G 同构.

证明　通过定理 1.10 可知 $\mathrm{Ker}\rho \lhd G$, 并且商群 $G/\mathrm{Ker}\rho$ 与 $\mathrm{Im}\rho$ 同构. 因此, 若 $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$, 那么 $G \cong \mathrm{Im}\rho$. 相反, 若 $G \cong \mathrm{Im}\rho$, 从而这两个群的阶数是相同的, 因此 $|\mathrm{Ker}\rho| = 1$; 即 ρ 是一个忠实表示. 证毕.

3.8　例子

(1) 前面例 3.2(1) 给出的群 D_8 的表示:

$$(a^i b^j)\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^j$$

是忠实表示, 因为群中的单位元是唯一满足 $g\rho = I$ 的元素. 因此由矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

生成的群与 D_8 是同构的.

(2) 由于 $T^{-1}AT = I_n$ 当且仅当 $A = I_n$, 故所有与忠实表示等价的表示都是忠实表示.

(3) 群 G 的平凡表示是忠实表示当且仅当 $G = \{1\}$.

第 6 章将证明每一个有限群都有一个忠实表示.

群表示论中的基本问题就是寻找并理解有限群的所有表示.

第 3 章总结

1. 群 G 的一个表示为从 G 到 $GL(n,F)$ 的同态.

2. 群 G 的表示 σ 与 ρ 等价当且仅当存在一个可逆矩阵 T 使得对于所有的 $g\in G$, 成立:

$$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T.$$

3. 如果一个群表示是单射, 那么这个表示是忠实表示.

第 3 章习题

1. 令 G 为 m 阶循环群, 即 $G=\langle a:a^m=1\rangle$. 假设 $A\in GL(n,\mathbb{C})$, 定义 ρ: $G\to GL(n,\mathbb{C})$ 为

$$\rho: a^r \mapsto A^r \quad (0\leqslant r\leqslant m-1).$$

证明 ρ 是群 G 在数域 $\mathbb{C}$ 上的表示当且仅当 $A^m=I$.

2. 假设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

且 $G=\langle a:a^3=1\rangle\cong C_3$. 证明映射 ρ_j: $G\to GL(2,\mathbb{C})(1\leqslant j\leqslant 3)$:

$$\begin{aligned} \rho_1 &: a^r\mapsto A^r, \\ \rho_2 &: a^r\mapsto B^r, \\ \rho_3 &: a^r\mapsto C^r \quad (0\leqslant r\leqslant 2) \end{aligned}$$

是群 G 在数域 $\mathbb{C}$ 上的表示, 并判断哪些表示是忠实表示.

3. 假设群 G=$D_{2n}=\langle a,b:a^n=b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$, 并且 $F=\mathbb{R}$或者$\mathbb{C}$. 证明存在表示 ρ: $G\to GL(1,F)$ 使得 $a\rho=(1)$ 且 $b\rho=(-1)$.

4. 设群 G 在数域 F 上的有表示 ρ,σ,τ, 证明:

(1) ρ 与 ρ 等价;

(2) 如果 ρ 与 σ 等价, 那么 σ 也和 ρ 等价;

(3) 如果 ρ 与 σ 等价,σ 与 τ 等价, 那么 ρ 也与 τ 等价.

5. 假设群 $G=D_{12}=\langle a,b:a^6=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$. 定义数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵 A,B,C,D 为

$$A=\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{3}} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

证明每一个映射 ρ_k: $G \to GL(2,\mathbb{C})(k=1,2,3,4)$:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &: \quad a^r b^s \mapsto A^r B^s,\\
\rho_2 &: \quad a^r b^s \mapsto A^{3r}(-B)^r,\\
\rho_3 &: \quad a^r b^s \mapsto (-A)^r B^s,\\
\rho_4 &: \quad a^r b^s \mapsto C^r D^s \quad (0 \leqslant r \leqslant 5, 0 \leqslant s \leqslant 1)
\end{aligned}$$

均是群 G 的表示, 并判断哪些表示是忠实表示, 哪些表示之间是等价的.

6. 试给出 D_8 的一个次数为 3 的忠实表示.

7. 假设 ρ 是群 G 的次数为 1 的表示, 证明 $G/\mathrm{Ker}\rho$ 是一个交换群.

8. 令 ρ 是群 G 的一个表示, 假设 g 和 h 是群 G 中的元素, 且满足 $(g\rho)(h\rho)=(h\rho)(g\rho)$. 请问是否有 $gh=hg$?

第4章　FG-模

现在我们来引入 FG-模的概念, 并说明 FG-模与 G 在 F 上的表示有着紧密的联系. 这本书的其余部分大多是建立在 FG-模的基础之上的, 因为这种表示理论有多个优势.

FG-模

令 G 为一个群, F 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

设 $\rho : G \to GL(n, F)$ 是 G 的一个表示. 记 $V = F^n$ 为由所有行向量 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 组成的向量空间, 其中 $\lambda_i \in F$. 对任意的 $v \in V, g \in G$, 行向量 v 与 $n \times n$ 矩阵 $g\rho$ 的矩阵乘积

$$v(g\rho),$$

为 V 中的一个行向量 (因为一个 $1 \times n$ 的矩阵与一个 $n \times n$ 的矩阵的乘积仍是一个 $1 \times n$ 的矩阵).

现在我们列出乘积 $v(g\rho)$ 的一些基本性质. 首先, ρ 是一个同态, 这表明对任意的 $v \in V, g, h \in G$,

$$v((gh)\rho) = v(g\rho)(h\rho).$$

接下来, 由于 1ρ 是单位矩阵, 对任意的 $v \in V$, 有

$$v(1\rho) = v.$$

最后, 由矩阵乘积的性质, 对任意的 $u, v \in V, \lambda \in F$ 和 $g \in G$, 有

$$(\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho)),$$

$$(u + v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho).$$

4.1　例子

令 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, 且 $\rho : G \to GL(2, F)$ 为例 3.2(1) 中给出的 G 在 F 上的表示. 这样

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例如, 若 $v = (\lambda_1, \lambda_2) \in F^2$, 那么

$$v(a\rho) = (-\lambda_2, \lambda_1),$$

$$v(b\rho) = (\lambda_1, -\lambda_2),$$

$$v(a^3\rho) = (\lambda_2, -\lambda_1).$$

通过上面关于乘积 $v(g\rho)$ 的观察, 现在定义一个 FG-模.

4.2 定义

令 V 为 F 上的一个向量空间, G 为一个群. 那么 V 是一个 FG-模, 如果定义的乘积 $vg(v \in V, g \in G)$, 对任意的 $u, v \in V, \lambda \in F$ 和 $g, h \in G$ 满足下列条件:

(1) $vg \in V$;

(2) $v(gh) = (vg)h$;

(3) $v1 = v$;

(4) $(\lambda v)g = \lambda(vg)$;

(5) $(u + v)g = ug + vg$.

我们在 "FG-模" 中用字母 F 和 G 来表示 V 是 F 上的一个向量空间, 而 G 是一个群, 从 G 中取元素 g 来作成乘积 $vg(v \in G)$.

定义中的条件 (1), (4), (5) 保证对任意的 $g \in G$, 函数

$$v \mapsto vg \quad (v \in V)$$

是 V 的一个自同态.

4.3 定义

令 V 为一个 FG-模, $\mathscr{B}$ 为 V 的一组基. 对每一个 $g \in G$, 记 $[g]_{\mathscr{B}}$ 为 V 的自同态 $v \mapsto vg$ 在基 $\mathscr{B}$ 下的矩阵.

FG-模与 G 在 F 上的表示之间的联系由下面的结论给出.

4.4 定理

(1) 若 $\rho : G \to GL(n, F)$ 是 G 在 F 上的一个表示, 且 $V = F^n$, 那么 V 是一个 FG-模, 如果定义乘积 vg 为

$$vg = v(g\rho) \quad (v \in V, g \in G).$$

另外, 存在 V 的一组基 $\mathscr{B}$ 使得

$$g\rho = [g]_{\mathscr{B}}, \quad \text{对任意的} g \in G.$$

(2) 假设 V 是一个 FG-模, $\mathscr{B}$ 是 V 的一组基. 那么函数

$$g \mapsto [g]_{\mathscr{B}} \quad (g \in G)$$

是 G 在 F 上的一个表示.

证明 (1) 我们已经知道对任意的 $u, v \in F^n, \lambda \in F$ 和 $g, h \in G$, 有

$$v(g\rho) \in F^n,$$

$$v((gh)\rho) = (v(g\rho))(h\rho),$$

$$v(1\rho) = v,$$

$$(\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho)),$$

$$(u+v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho).$$

所以, F^n 作成一个 FG-模, 如果定义

$$vg = v(g\rho), \quad 对任意的 v \in F^n, g \in G.$$

另外, 若设 $\mathscr{B}$ 为 F^n 的一组基

$$(1,0,0\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots 1),$$

那么对任意的 $g \in G$ 有 $g\rho = [g]_{\mathscr{B}}$.

(2) 令 V 为一个 FG-模, 它的一组基为 $\mathscr{B}$. 因为对任意的 $g, h \in G$ 有 $v(gh) = (vg)h$, 且对任意的 $v \in \mathscr{B}$, 有

$$[gh]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}}[h]_{\mathscr{B}}.$$

特别地, 对任意的 $g \in G$,

$$[1]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}}[g^{-1}]_{\mathscr{B}}.$$

对任意的 $v \in V$ 有 $v1 = v$, 所以 $[1]_{\mathscr{B}}$ 为单位矩阵. 所以每个 $[g]_{\mathscr{B}}$ 都是可逆的 (逆矩阵为 $[g^{-1}]_{\mathscr{B}}$).

我们已经证明了函数 $g \mapsto [g]_{\mathscr{B}}$ 是从 G 到 $GL(n, F)$ 的同态 (其中 $n = \dim V$), 因此是 G 在 F 上的表示. 证毕.

下面的例子用来说明定理 4.4 中的第 (1) 部分.

4.5　例子

(1) 令 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. ρ 为例 3.2(1) 所给的 G 在 F 上的表示, 所以

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

记 $V = F^2$. 由定理 4.4(1), V 是一个 FG-模, 如果定义

$$vg = v(g\rho) \quad (v \in V, g \in G).$$

例如,

$$(1,0)a = (1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1).$$

若 v_1, v_2 是 V 的一组基 $(1,0), (0,1)$, 那么有

$$v_1a = v_2, \quad v_1b = v_1,$$

$$v_2a = -v_1, \quad v_2b = -v_2.$$

若 $\mathscr{B}$ 表示基 v_1, v_2, 那么表示

$$g \mapsto [g]_{\mathscr{B}} \quad (g \in G)$$

恰好就是表示 ρ(再次利用定理 4.4(1)).

(2) 令 $G = Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. 在例 1.2(4) 中定义 Q_8 为由

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{和} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

生成的 $GL(2,\mathbb{C})$ 的子群, 所以我们已经有 G 在 $\mathbb{C}$ 上的一个表示. 为了说明定理 4.4(1), 必须取 $F = \mathbb{C}$. 然后我们就得到一个基为 v_1, v_2 的 $\mathbb{C}G$-模, 使得

$$v_1a = iv_1, \quad v_1b = v_2,$$

$$v_2a = -iv_2, \quad v_2b = -v_1.$$

在上面这些例子中注意到, 对任意的 $v \in V, g \in G, vg$ 是由向量 v_1a, v_2a, v_1b, v_2b 决定的. 例如, 在例 4.5(1) 中,

$$\begin{aligned}(v_1 + 2v_2)ab &= v_1ab + 2v_2ab \\ &= v_2b - 2v_1b \\ &= -v_2 - 2v_1.\end{aligned}$$

对所有的 FG-模 V 有一个类似的结论成立: 若 $v_1, \ldots, v_n$ 为 V 的一组基, $g_1, \ldots, g_r$ 生成 G, 那么对任意的 $v \in V, g \in G$, 向量 $v_i g_j (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant r)$ 决定了 vg.

简单地说, 我们将会展示几种不利用表示直接构造 FG-模的方法. 为了达到这一点, 我们指定群中的元素在 V 的一组基 $v_1, \ldots, v_n$ 上的作用, 然后将这个作用线性地扩展到整个 V 上; 也就是, 首先对每个 i, 和 G 中的每个元素 g 定义 $v_i g$, 然后就可以定义

$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)g \quad (\lambda_i \in F)$$

为

$$\lambda_1(v_1 g) + \ldots + (\lambda_n v_n g).$$

如我们所料, 在定义向量 $v_i g$ 的时候是有一定限制的. 接下来的结果往往会用来说明选择怎样的乘法将 V 作成 FG-模.

4.6 命题

假定 $v_1, \ldots, v_n$ 是 F 上的向量空间 V 的一组基. 假设对任意的 $v \in V, g \in G$ 有一个乘法 vg, 对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n, g, h \in G, \lambda_1, \ldots \lambda_n \in F$, 满足下面的条件:

(1) $v_i g \in V$;

(2) $v_i(gh) = (v_i g)h$;

(3) $v_i 1 = v_i$;

(4) $(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)g = \lambda_1(v_1 g) + \ldots + \lambda_n(v_n g)$.

那么 V 是一个 FG-模.

证明 对任意的 $v \in V$, 由条件 (3) 和 (4) 显然可以得到 $v1 = v$.

条件 (1) 和 (4) 能保证对任意的 $g \in G$, 函数 $v \mapsto vg (v \in V)$ 是 V 的一个自同态. 即

$$\begin{aligned}
&vg \in V, \\
&(\lambda v)g = \lambda(vg), \\
&(u+v)g = ug + vg,
\end{aligned}$$

对任意的 $u, v \in V, \lambda \in F, g \in G$. 因此对任意的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F, u_1, \ldots, u_n \in V$ 和 $h \in G$ 有

(4.7) $$(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n)h = \lambda_1(u_1 h) + \ldots + \lambda_n(u_n h).$$

现假设 $v \in V, g, h \in G$, 那么 $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$, 且

$$\begin{aligned} v(gh) &= \lambda_1(v_1(gh)) + \ldots + \lambda_n(v_n(gh)) \quad \text{根据条件 (4)} \\ &= \lambda_1((v_1g)h) + \ldots + \lambda_n((v_ng)h) \quad \text{根据条件 (2)} \\ &= (\lambda_1(v_1g) + \ldots + \lambda_n(v_ng))h \quad \text{根据 (4.7)} \\ &= (vg)h \quad \text{根据条件 (4).} \end{aligned}$$

我们就验证了所有使 V 成为一个 FG-模所要满足的条件. 证毕.

接下来我们的定义将平凡表示和忠实表示的概念转换为就模而言的概念.

4.8 定义

(1) 平凡 FG-模是使得

$$vg = v, \quad \text{对任意的} v \in V, g \in G.$$

成立的 F 上的 1 维向量空间 V,

(2) 一个 FG-模是忠实的, 如果 G 的单位元是 G 中唯一使得下式成立的元素,

$$vg = v, \quad \text{对任意的} v \in V.$$

例如, 例 4.5(1) 中的 FD_8-模是忠实的.

接下来的目标是用命题 4.6 对对称群的所有子群构造忠实 FG-模.

置 换 模

设 G 是 S_n 的一个子群, 所以 G 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的置换组成的一个群. 令 V 是 F 上的一个 n 维向量空间, 它的一组基为 $v_1, \ldots, v_n$. 对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$ 和 G 中的每个置换 g, 定义

$$v_ig = v_{ig}.$$

那么 $v_ig \in V$ 且 $v_i1 = v_i$. 并且, 对 $g, h \in G$, 有

$$v_i(gh) = v_{i(gh)} = v_{(ig)h} = (v_ig)h.$$

现在我们将每个 g 的作用线性地扩张到整个 V 上; 也就是, 对任意的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F, g \in G$, 定义

$$(\lambda_1v_1 + \ldots + \lambda_nv_n)g = \lambda_1(v_1g) + \ldots + \lambda_n(v_ng).$$

根据命题 4.6, V 是一个 FG-模.

4.9　例子

设 $G = S_4$, $\mathscr{B}$ 为 V 的一组基 v_1, v_2, v_3, v_4. 若 $g = (12)$, 那么

$$v_1 g = v_2, \quad v_2 g = v_1, \quad v_3 g = v_3, \quad v_4 g = v_4.$$

如果 $h = (134)$, 那么

$$v_1 h = v_3, \quad v_2 h = v_2, \quad v_3 h = v_4, \quad v_4 h = v_1.$$

有

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [h]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.10　定义

设 G 是 S_n 的一个子群. FG-模 V 的一组基 $v_1, \ldots, v_n$ 对每个 i 和任意的 $g \in G$ 有

$$v_i g = v_{ig},$$

则称 V 是 G 在 F 上的置换模. 称 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的自然基.

如果将置换模的基 $v_1, \ldots, v_n$ 记为 $\mathscr{B}$, 那么对任意的 $g \in G$, 矩阵 $[g]_{\mathscr{B}}$ 的每行每列仅有一个 1 其余均为 0. 这样的矩阵称为置换矩阵.

因为 G 中将每个 v_i 固定不动的元素仅有单位元, 所以置换模是一个忠实 FG-模. 如果还记得每一个阶为 n 的群 G 都与 S_n 的一个子群同构, 那么就应该能知道 G 有一个 n 维忠实 FG-模. 我们将在第 6 章详细论证.

4.11　例子

设 $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$. 那么 G 同构于由置换 (123) 生成的 S_3 的循环子群. 这告诉我们一个事实, 如果 V 是 F 上的一个 3 维的向量空间, 它的一组基为 v_1, v_2, v_3, 那么可以将 V 构造成一个 FG-模, 其中

$$\begin{aligned} &v_1 1 = v_1, \quad v_2 1 = v_2, \quad v_3 1 = v_3, \\ &v_1 a = v_2, \quad v_2 a = v_3, \quad v_3 a = v_1, \\ &v_1 a^2 = v_3, \quad v_2 a^2 = v_1, \quad v_3 a^2 = v_2. \end{aligned}$$

当然, 通过对任意 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$, 有

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) g = \lambda_1 (v_1 g) + \lambda_2 (v_2 g) + \lambda_3 (v_3 g).$$

而定义了 vg, 其中 v 是 V 中任一向量, $g=1,a$ 或 a^2. 利用命题 4.6 可以验证 V 是一个 FG-模, 而我们的构造主要是根据置换模的定义的.

FG-模与等价表示

在这章的最后我们来讨论 FG-模与 G 在 F 上的等价表示之间的关系. 一个 FG-模对 V 的某组基 $\mathscr{B}$ 给出一些形如

$$g \mapsto [g]_{\mathscr{B}} \quad (g \in G)$$

表示. 接下来的结果会说明这些表示都是互相等价的 (定义 3.3); 另外, G 的任意两个等价表示是由某个 FG-模以这种方式产生的.

4.12　定理

设 V 是基为 $\mathscr{B}$ 的一个 FG-模, ρ 是 G 在 F 上的一个表示, 定义为

$$\rho : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}} \quad (g \in G).$$

(1) 若 $\mathscr{B}'$ 是 V 的一组基, 那么 G 的表示

$$\phi : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}'} \quad (g \in G),$$

与 ρ 等价.

(2) 若 G 有一个等价于 ρ 的表示 σ, 那么存在 V 的一组基 $\mathscr{B}''$ 使得

$$\sigma : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}''} \quad (g \in G).$$

证明　(1) 设 T 是 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}'$ 的过渡矩阵 (定义 2.23). 那么根据 (2.24), 对任意的 $g \in G$, 有

$$[g]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}'}T.$$

因此 ϕ 与 ρ 等价.

(2) 假设 ρ 与 σ 是 G 的等价表示. 那么存在一个可逆矩阵 T, 使得

$$g\rho = T^{-1}(g\sigma)T, \quad \text{对任意的} g \in G$$

成立. 令 $\mathscr{B}''$ 为 V 的一组基, 且 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}''$ 的过渡矩阵为 T. 那么对任意的 $g \in G$, 有

$$[g]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}''}T,$$

所以有 $g\sigma = [g]_{\mathscr{B}''}$. 证毕.

4.13　例子

设 $G=C_3=\langle a:a^3=1\rangle$. 且

$$a\rho=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad b\rho=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad a^2\rho=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

是 G 的一个表示 (仅需验证 $(a\rho)^2=a^2\rho$ 和 $(a\rho)^3=I$; 参看习题 3.2).

若 V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个 2 维向量空间, 它的一组基为 v_1,v_2(记为 $\mathscr{B}$), 那么可以如定理 4.4(1) 中一样将 V 构造为一个 $\mathbb{C}G$-模, 通过定义

$$\begin{aligned}&v_1 1=v_1,\quad v_1 a=v_2,\quad v_1 a^2=-v_1-v_2,\\&v_2 1=v_2,\quad v_2 a=-v_1-v_2,\quad v_2 a^2=v_1.\end{aligned}$$

那么就有

$$[1]_{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad [a]_{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad [a^2]_{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

现在令 $u_1=v_1,u_2=v_1+v_2$. 那么 u_1,u_2 是 V 的另一组基, 记为 $\mathscr{B}'$. 因为

$$\begin{aligned}&u_1 1=u_1,\quad u_1 a=-u_1+u_2,\quad u_1 a^2=-u_2,\\&u_2 1=u_2,\quad u_2 a=-u_1,\quad u_2 a^2=u_1-u_2,\end{aligned}$$

我们可以得到表示 $\phi:g\mapsto[g]_{\mathscr{B}'}$, 其中

$$[1]_{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad [a]_{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad [a^2]_{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

如果

$$T=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$

那么对任意的 $g\in G$, 有

$$[g]_{\mathscr{B}}=T^{-1}[g]_{\mathscr{B}'}T,$$

所以 ρ 与 ϕ 是等价的, 与定理 4.12(1) 一致.

第 4 章总结

1. FG-模是 F 上的一个向量空间, 加上 G 中元素作用在右边的一个乘法. 这个乘法需要满足定义 4.2 中的 (1)~(5).

2. G 在 F 上的一个表示与 FG-模之间有一个对应如下.

(a) 假设 $\rho: G \to GL(n, F)$ 为 G 的一个表示. 那么 F^n 是一个 FG-模, 如果定义

$$vg = v(g\rho) \quad (v \in F^n, g \in G).$$

(b) 若 V 为一个 FG-模, 基为 $\mathscr{B}$, 那么 $\rho: g \mapsto [g]_{\mathscr{B}}$ 是 G 在 F 上的一个表示.

3. 若 G 是 S_n 的一个子群, 那么置换 FG-模有一组基 $v_1, \ldots, v_n$, 并且对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n, g \in G$ 有 $v_i g = v_{ig}$.

第 4 章习题

1. 假设 $G = S_3$, 且 $V = sp(v_1, v_2, v_3)$ 是定义 4.10 中定义的 G 在 $\mathbb{C}$ 上的置换模. 令 $\mathscr{B}_1$ 为 V 的一组基 v_1, v_2, v_3, $\mathscr{B}_2$ 为基 $v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_2, v_1 - v_3$. 对 S_3 中的所有元素 g 计算 3×3 矩阵 $[g]_{\mathscr{B}_1}$ 和 $[g]_{\mathscr{B}_2}$. 从矩阵 $[g]_{\mathscr{B}_2}$ 中你能观察到什么.

2. 令 $G = S_n$, V 是 F 上的一个向量空间. 说明 V 是一个 FG-模, 如果对任意的 $v \in V$, 定义

$$vg = \begin{cases} v, & \text{若 } g \text{ 为偶置换}, \\ -v, & \text{若 } g \text{ 为奇置换}. \end{cases}$$

3. 令 $Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, 阶为 8 的四元数群. 说明存在一个维数为 4 的 $\mathbb{R}Q_8$-模 V, 基为 v_1, v_2, v_3, v_4, 使得

$$v_1 a = v_2, \quad v_2 a = -v_1, \quad v_3 a = -v_4, \quad v_4 a = v_3,$$
$$v_1 b = v_3, \quad v_2 b = v_4, \quad v_3 b = -v_1, \quad v_4 b = -v_2.$$

4. 设 A 为一个 $n \times n$ 矩阵, B 为交换 A 的各行得到的矩阵. 说明存在一个 $n \times n$ 矩阵 P 使得 $B = PA$. 对交换 A 的各列得到的矩阵有类似的结论.

第 5 章 FG-子模和可约性

我们要想研究 FG-模, 先引入这个理论的基本理论 —— 不可约的 FG-模. 首先我们需要一个 FG-模的 FG-子模的概念.

在这一章中, G 是一个群, F 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

FG-子模

5.1 定义

令 V 是一个 FG-模. W 是 V 的一个子集, 如果 W 是一个子空间且对于所有的 $w \in W, g \in G$, 有 $wg \in W$, 那么 W 是 V 的一个 FG-子模.

因此, V 的一个 FG-子模是一个子空间, 同时也是一个 FG-模.

5.2 例子

(1) 对于每个 FG-模 V 来说, 零子空间 $\{0\}$ 和 V 本身都是 V 的 FG-子模.

(2) 令 $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1\rangle$, V 是在例 4.11 中定义的 3 维 FG-模. 因此 V 有一组基 v_1, v_2, v_3, 并且有

$$v_1 1 = v_1, \quad v_2 1 = v_2, \quad v_3 1 = v_3,$$

$$v_1 a = v_2, \quad v_2 a = v_3, \quad v_3 a = v_1,$$

$$v_1 a^2 = v_3, \quad v_2 a^2 = v_1, \quad v_3 a^2 = v_2.$$

令 $w = v_1 + v_2 + v_3, W = sp(w)$, 由 w 张成的一维子空间. 因为

$$w1 = wa = wa^2 = w,$$

W 是 V 的一个 FG-子模. 然而 $sp(v_1 + v_2)$ 不是一个 FG-子模, 因为

$$(v_1 + v_2)a = v_2 + v_3 \notin sp(v_1 + v_2).$$

不可约的 FG-模

5.3 定义

如果一个 FG-模 V 是非零的, 并且它除了 $\{0\}$ 和 V 以外没有其他的 FG-子模, 那么就说这个 FG-模 V 是不可约的.

如果 V 有一个 FG-子模 W, 并且 W 不是 $\{0\}$ 和 V, 那么 V 是可约的.

相似地, 给定一个表示 $\rho: G \to GL(n, F)$, 如果由以下定义的 FG-模 F^n

$$vg = v(g\rho) \quad (v \in F^n, g \in G)$$

(见定理 4.4(1)) 是不可约的, 那么我们就说这个表示是不可约的, 如果 F^n 是可约的, 那么 ρ 是可约的.

假设 V 是一个可约的 FG-模, 那么存在一个 FG-子模 W, $0 < \dim W < \dim V$. 取 W 的一组基 $\mathscr{B}_2$, 把它扩充成 V 的一组基 $\mathscr{B}$. 那么对于所有的 $g \in G$, 矩阵 $[g]_{\mathscr{B}}$ 有如下形式

(5.4)
$$\left(\begin{array}{c|c} X_g & 0 \\ \hline Y_g & Z_g \end{array}\right),$$

其中 X_g, Y_g, Z_g 是矩阵, X_g 是 $k \times k$ 阶的 $(k = \dim W)$.

一个次数是 n 的表示是可约的当且仅当它等价于具有 (5.4) 形式的一个表示, 其中 X_g 是 $k \times k$ 阶的, 并有 $0 < k < n$.

注意到在 (5.4) 中, 函数 $g \mapsto X_g$ 和 $g \mapsto Z_g$ 是 G 的表示. 为了证明这个, 令 $g, h \in G$, 把 (5.4) 中的矩阵 $[g]_{\mathscr{B}}$ 和 $[h]_{\mathscr{B}}$ 相乘即可. 同时注意到如果 V 是可约的, 那么 $\dim V \geqslant 2$.

5.5　例子

(1) 令 $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$, 令 V 是 3 维 FG-模, 它的一组基是 v_1, v_2, v_3, 使得

$$v_1 a = v_2, \quad v_2 a = v_3, \quad v_3 a = v_1,$$

像在例 4.11 中定义的那样. 我们在例 5.2(2) 中已经证明 V 是一个可约的 FG-模, 并且有一个 FG-子模 $W = sp(v_1 + v_2 + v_3)$. 令 $\mathscr{B}$ 是 V 的一组基 $v_1 + v_2 + v_3, v_1, v_2$. 那么

$$[1]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad [a]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right), \quad [a^2]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

这个可约的表示给了我们其他两个表示: 在“左上角”得到了平凡表示, 在“右下角”得到的表示由以下式子给出:

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a^2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 令 $G = D_8, V = F^2$ 是在例 4.5(1) 中出现的 2 维的 FG-模. 因此 $G = \langle a, b \rangle$, 并且对于所有的 $(\lambda, \mu) \in V$, 有

$$(\lambda, \mu)a = (-\mu, \lambda), \quad (\lambda, \mu)b = (\lambda, -\mu).$$

我们称 V 是一个不可约的 FG-模. 为了证明这个, 假设存在一个 FG-子模 $U \neq V$. 那么 $\dim U \leqslant 1$, 所以存在 $\alpha, \beta \in F$, 使得 $U = sp((\alpha, \beta))$. 因为 U 是一个 FG-模, 所以 $(\alpha, \beta)b$ 是 (α, β) 的一个数乘, 因此或者 $\alpha = 0$, 或者 $\beta = 0$. 因为 $(\alpha, \beta)a$ 也是 (α, β) 的一个数乘, 这样就有 $\alpha = \beta = 0$, 所以 $U = \{0\}$. 因此 V 是一个不可约的 FG-模.

第 5 章总结

1. 如果 V 是一个 FG-模, W 是 V 的一个子空间同时也是一个 FG-模, 那么 W 是 V 的一个 FG-子模.

2. 如果一个 FG-模 V 是非零的, 并且它除了 $\{0\}$ 和 V 以外没有其他的 FG-子模, 那么这个 FG-模 V 是不可约的.

第 5 章习题

1. 令 $G = C_2 = \langle a : a^2 = 1 \rangle$, 令 $V = F^2$. 对于 $(\alpha, \beta) \in V$, 定义 $(\alpha, \beta)1 = (\alpha, \beta), (\alpha, \beta)a = (\beta, \alpha)$. 证明 V 是一个 FG-模, 并找到 V 的所有的 FG-子模.

2. 令 ρ, σ 是群 G 在 F 上的等价表示. 证明如果 ρ 可约, 那么 σ 可约.

3. 在习题 3.5 中定义的 D_{12} 的四个表示哪些是不可约的?

4. 如下定义 S_6 中的置换 a, b, c:

$$a = (123), \quad b = (456), \quad c = (23)(45),$$

令 $G = \langle a, b, c \rangle$.

(a) 验证

$$a^3 = b^3 = c^2 = 1, \quad ab = ba,$$
$$c^{-1}ac = a^{-1}, \quad c^{-1}bc = b^{-1}.$$

证明 G 的阶是 18.

(b) 假设 ε, η 是 1 的复立方根. 证明存在 G 在 $\mathbb{C}$ 上的一个表示 ρ 使得

$$a\rho = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}, \quad c\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) ε, η 取什么值时 ρ 是忠实表示?

(d) ε, η 取什么值时 ρ 是不可约的?

5. 令 $G = C_{13}$. 找一个 $\mathbb{C}G$-模, 它既不是可约的也不是不可约的.

第6章　群　代　数

有限群 G 的群代数是一个 $|G|$ 维的向量空间, 并在该向量空间中引入了额外的乘法运算. 在某种意义上, 群代数是研究群表示的所有性质的源泉, 特别地, 如果这个群的群代数被完全的分析清楚, 那么研究群表示论的最终目的 —— 了解有限群的所有表示 —— 就能达到. 因此, 群代数是具有重要意义的代数结构.

在本章中, 首先给出群代数的定义, 然后将运用它去构造一个重要的忠实表示, 即正则表示, 对于这个表示我们会在后面的章节中进行更加详细的讨论.

群 G 的群代数

假设 G 是一个有限群, 它的元素为 $g_1, \ldots, g_n$, 令 F 为 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$.

定义一个 F 上的以 $g_1, \ldots, g_n$ 为基的向量空间 FG, 其中 FG 中的向量均为如下形式:

$$\lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_n g_n \quad (\text{对于所有的}\lambda_i \in F).$$

若

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i$$

是 FG 中的元素, 并且 $\lambda \in F$, 其中 FG 中的加法与数乘定义为

$$u + v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i, \quad \text{并且}\lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i) g_i.$$

在这样的运算下, FG 成为 F 上的 n 维向量空间, 且 $g_1, \ldots, g_n$ 是它的一组基. 这组基被称作 FG 的自然基.

6.1　例子

令 $G = C_3 = \langle a : a^3 = e \rangle$(为了避免与 F 中的元素 1 混淆, 在该例中用 e 代表群 G 中的单位元). 向量空间 $\mathbb{C}G$ 包含元素

$$u = e - a + 2a^2 \text{ 和 } v = \frac{1}{2}e + 5a.$$

那么

$$u + v = \frac{3}{2}e + 4a + 2a^2, \quad \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a^2.$$

有时将 FG 中的元素写作如下形式:

$$\sum_{g\in G}\lambda_g g \quad (\lambda_g \in F).$$

FG 具有较线性空间更多的代数结构 —— 我们可以运用群 G 上的乘法运算来定义 FG 上的乘法如下:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\mu_h h\right) &= \sum_{g,h\in G}\lambda_g\mu_h(gh)\\ &= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}(\lambda_h\mu_{h^{-1}g})g,\end{aligned}$$

对于所有的 $\lambda_g, \mu_h \in F$.

6.2　例子

如果 $G = C_3$ 并且 u, v 即为例 6.1 中给出的两个元素, 那么

$$\begin{aligned}uv &= (e - a + 2a^2)\left(\frac{1}{2}e + 5a\right)\\ &= \frac{1}{2}e + 5a - \frac{1}{2}a - 5a^2 + a^2 + 10a^3\\ &= \frac{21}{2}e + \frac{9}{2}a - 4a^2.\end{aligned}$$

6.3　定义

向量空间 FG, 连同其上定义的乘法

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G}\lambda_g\mu_h(gh)$$

$(\lambda_g, \mu_h \in F)$, 被称作群 G 在 F 上的群代数.

在群代数 FG 中包含一个乘法单位元, 即为 $1e$(其中 1 是 F 的单位元, 而 e 是群 G 的单位元), 将它简记为 1.

6.4　命题

群代数FG 中的乘法运算满足如下性质, 对于所有的 $r, s, t \in FG$和$\lambda \in F$:

(1) $rs \in FG$;

(2) $r(st) = (rs)t$;

(3) $r1 = 1r = r$;

(4) $(\lambda r)s = \lambda(rs) = r(\lambda s)$;

(5) $(r+s)t = rt + st$;

(6) $r(s+t) = rs + rt$;

(7) $r0 = 0r = 0$.

证明　(1) 通过 rs 的定义可以直接得到结论 $rs \in FG$.

(2) 令

$$r = \sum_{g \in G} \lambda_g g, \quad s = \sum_{g \in G} \mu_g g, \quad t = \sum_{g \in G} \nu_g g$$

$(\lambda_g, \mu_g, \nu_g \in F)$. 则

$$\begin{aligned}(rs)t &= \sum_{g,h,k \in G} \lambda_g \mu_h \nu_k (gh)k \\ &= \sum_{g,h,k \in G} \lambda_g \mu_h \nu_k g(hk) \\ &= r(st).\end{aligned}$$

我们将其他等式的证明留作练习. 证毕.

事实上, 任何一个向量空间在其上定义的乘法如果满足命题 6.4 中的性质 (1)~(7), 那么这个向量空间就是一个代数. 虽然我们关注的是群代数, 但是有必要指出的是一个代数所满足的公理表明了它不仅是一个向量空间而且是一个环.

正则 *FG*-模

现在我们应用群代数去定义一个重要的 FG-模.

令 $V = FG$, 因此 V 是数域 F 上的 n 维向量空间, 其中 $n = |G|$. 对于所有的 $u, v \in V, \lambda \in F$和$g, h \in G$, 根据命题 6.4 中的 (1)~(5) 可以得到

$$\begin{aligned}&vg \in V, \\ &v(gh) = (vg)h, \\ &v1 = v, \\ &(\lambda v)g = \lambda(vg), \\ &(u+v)g = ug + vg,\end{aligned}$$

因此 V 是一个 FG-模.

6.5　定义

令 G 表示一个有限群并且 F 表示 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$. 向量空间 FG, 在其上定义自然乘法 vg $(v \in FG, g \in G)$ 后被称为正则 FG-模.

群 G 在 FG 的自然基下的表示 $\rho : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}}$ 被称作是群 G 在 F 上的正则表示.

注意正则 FG-模的维数为 $|G|$.

6.6　命题

正则 FG-模是忠实模.

证明　假设 $g \in G$ 并且 $vg = v$ 对所有的 $v \in FG$. 则 $1g = 1$, 因此 $g = 1$, 从而结论成立. 证毕.

6.7　例子

令 $G = C_3 = \langle a : a^3 = e \rangle$. 那么 FG 中的元素具有形式

$$\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 \quad (\lambda_i \in F).$$

从而可以得到

$$\begin{aligned}(\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2)e &= \lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2,\\ (\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2)a &= \lambda_3 e + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2,\\ (\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2)a^2 &= \lambda_2 e + \lambda_3 a + \lambda_1 a^2.\end{aligned}$$

取对应于 FG 的基 e, a, a^2 的矩阵, 则可以得到群 G 的正则表示:

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

FG 在 FG-模上的作用

回顾 FG-模定义可知它是数域 F 上的向量空间, 并且在其上定义了乘法 (乘法满足一些公理). 有时候将乘法的定义进行扩充使得 FG 中的每个元素都可以与 V 中的元素进行作用是很有用的. 这可以通过自然的方法做到.

6.8　定义

假定 V 是一个 FG-模, 并且 $v \in V, r \in FG$, 即$r = \sum_{g \in G} \mu_g g (\mu_g \in F)$. 定义 vr 为

$$vr = \sum_{g \in G} \mu_g (vg).$$

6.9 例子

(1) 令 V 是如例 4.9 所示的 S_4 的置换模. 假定

$$r = \lambda(12) + \mu(134) \quad (\lambda, \mu \in F),$$

那么

$$\begin{aligned} v_1 r &= \lambda v_1(12) + \mu v_1(134) = \lambda v_2 + \mu v_3, \\ v_2 r &= \lambda v_1 + \mu v_2, \\ (2v_1 + v_2) r &= \lambda v_1 + (2\lambda + \mu) v_2 + 2\mu v_3. \end{aligned}$$

(2) 假设 V 是一个正则 FG-模, 那么对于所有的 $v \in V, r \in FG$, 元素 vr 是群代数 FG 中的两个元素的乘积, 如定义 6.3 所示.

读者可以将下面的结果与命题 6.4 进行比较.

6.10 命题

假设 V 是一个 FG-模. 那么对于所有的 $u, v \in V$, $\lambda \in F$, 所有的 $r, s \in FG$, 下列性质成立:

(1) $vr \in V$;

(2) $v(rs) = (vr)s$;

(3) $v1 = v$;

(4) $(\lambda v)r = \lambda(vr) = v(\lambda r)$;

(5) $(u + v)r = ur + vr$;

(6) $v(r + s) = vr + vs$;

(7) $v0 = 0r = 0$.

证明　除了 (2) 之外所有的结论都是显然的, 我们把它们留给读者证明. 现在给出 (2) 的证明.

令 $v \in V$ 并且 $r, s \in FG$, 且

$$r = \sum_{g \in G} \lambda_g g, \quad s = \sum_{h \in G} \mu_h h.$$

则有

$$v(rs) = v\left(\sum_{g,h} \lambda_g \mu_h (gh)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{g,h} \lambda_g \mu_h (v(gh)) \quad \text{由(4)和(6)} \\
&= \sum_{g,h} \lambda_g \mu_h ((vg)h) \\
&= \left(\sum_{g} \lambda_g (vg) \right) \left(\sum_{h} \mu_h h \right) \quad \text{由(4)(5)(6)} \\
&= (vr)s.
\end{aligned}
$$

证毕.

第 6 章总结

1. 群 G 在 F 上的群代数由群 G 中所有元素的线性组合构成, 并且在其上自然的定义了一个乘法.

2. 定义了乘法 $vg(v \in FG, G \in G)$ 的向量空间 FG 是一个正则 FG-模.

3. 正则 FG-模是忠实模.

第 6 章习题

1. 设群 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$.

(a) 设 x, y 为群代数 $\mathbb{C}G$ 中的元素, 且

$$x = a + 2a^2, \quad y = b + ab - a^2.$$

计算 xy, yx, x^2.

(b) 假设 $z = b + a^2 b$. 证明对于任意的 $g \in G$, 有 $zg = gz$. 从而得到对于任意的 $r \in \mathbb{C}G$, 有 $zr = rz$.

2. 写出 $C_2 \times C_2$ 在 F 上的正则表示所对应的矩阵.

3. 假设 $G = C_2$. 对于 $r, s \in \mathbb{C}G$, 是否可以通过 $rs = 0$ 推出 $r = 0$ 或者 $s = 0$?

4. 假设 G 为有限群, 即 $G = \{g_1, \cdots, g_n\}$, 令 $c = \sum_{i=1}^{n} g_i \in \mathbb{C}G$.

(a) 证明对于所有的 $h \in G$ 有 $ch = hc = c$.

(b) 证明 $c^2 =| G | c$.

(c) 假设 $\vartheta : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ 是一个将 $\mathbb{C}G$ 中任意的 v 变为 vc 的线性变换, 试给出 ϑ 在基 $g_1, \cdots, g_n$ 下所对应的矩阵.

5. 假设 V 是一个 FG-模, 根据定义证明

$$0r = 0 \text{ 对于所有的 } r \in FG, \quad \text{且}$$

$$v0 = 0 \text{ 对于所有的 } v \in V,$$

其中 0 分别代表 V 与 FG 中的零元素. 证明对于任意的有限群, 当 $|G|>1$ 时, 存在一个 FG-模 V 以及元素 $v\in V, r\in FG$ 使得 $vr=0$, 但是 v 与 r 均不为零.

6. 假设 $G=D_6=\langle a,b: a^3=b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$, 且 $\omega=e^{2\pi i/3}$. 证明群代数 $\mathbb{C}G$ 中的二维子空间

$$W=sp\{1+\omega^2 a+\omega a^2, b+\omega^2 ab+\omega a^2 b\}$$

是正则 $\mathbb{C}G$-模的一个不可约 $\mathbb{C}G$-子模.

第 7 章　FG-同态

"保结构"函数对于群和向量空间来说, 分别是群同态和线性变换. 对于 FG-模, 类似的函数称为 FG-同态, 我们在这章引入这个概念.

FG-同态

7.1　定义

设 V 和 W 为 FG-模. 函数 $\vartheta : V \to W$ 称为 FG-同态, 如果 ϑ 是一个线性变换, 且

$$(vg)\vartheta = (v\vartheta)g, \quad 对任意的 v \in V, g \in G.$$

换句话说, 若 ϑ 将 v 映到 w, 那么它将 vg 映到 wg.

若 G 为一个有限群, $\vartheta : V \to W$ 为 FG-同态, 那么对任意的 $v \in V$ 和 $r = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in FG$, 有

$$(vr)\vartheta = (v\vartheta)r,$$

因为

$$(vr)\vartheta = \sum_{g\in G} \lambda_g (vg)\vartheta = \sum_{g\in G} \lambda_g (v\vartheta)g = (v\vartheta)r.$$

接下来的结果展示 FG-同态以一种很自然的方式生成 FG-子模.

7.2　命题

设 V 和 W 为 FG-模, $\vartheta : V \to W$ 为 FG-同态. 那么 $\mathrm{Ker}\vartheta$ 是 V 的一个 FG-子模, 且 $\mathrm{Im}\vartheta$ 是 W 的一个 FG-子模.

证明　因为 ϑ 是线性变换, 所以 $\mathrm{Ker}\vartheta$ 是 V 的子空间, 且 $\mathrm{Im}\vartheta$ 是 W 的子空间.

令 $v \in \mathrm{Ker}\vartheta, g \in G$. 那么

$$(vg)\vartheta = (v\vartheta)g = 0g = 0,$$

所以 $vg \in \mathrm{Ker}\vartheta$. 因此 $\mathrm{Ker}\vartheta$ 是 V 的一个 FG-子模.

现在设 $w \in \mathrm{Im}\vartheta$, 所以存在某个 $v \in V$ 有 $w = v\vartheta$. 对任意的 $g \in G$, 有

$$wg = (v\vartheta)g = (vg)\vartheta \in \mathrm{Im}\vartheta,$$

所以 $\mathrm{Im}\vartheta$ 是 W 的一个 FG-子模. 证毕.

7.3 例子

(1) 若 $\vartheta: V \to W$ 对任意的 $v \in V$ 定义为 $v\vartheta = 0$, 那么 ϑ 是一个 FG-同态, 且 $\mathrm{Ker}\vartheta = V, \mathrm{Im}\vartheta = \{0\}$.

(2) 令 $\lambda \in F$, 定义 $\vartheta: V \to V$ 为对任意的 $v \in V$ 有 $v\vartheta = \lambda v$. 那么 ϑ 是一个 FG-同态. 假设 $\lambda \neq 0$, 有 $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}, \mathrm{Im}\vartheta = V$.

(3) 假设 G 是 S_n 的一个子群, 令 $V = sp(v_1, \ldots, v_n)$ 是 G 在 F 上置换模(定义 4.10), 并令 $W = sp(w)$ 为平凡 FG-模 (定义 4.8). 构造一个从 V 到 W 的 FG-同态 ϑ. 定义

$$\vartheta: \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) w \quad (\lambda_i \in F).$$

这样对任意的 i 有 $v_i\vartheta = w$. 那么 ϑ 是一个线性变换, 并且对任意的 $v = \sum \lambda_i v_i \in V$ 和 $g \in G$, 有

$$(vg)\vartheta = \left(\sum \lambda_i v_{ig}\right)\vartheta = \left(\sum \lambda_i\right) w,$$

且

$$(v\vartheta)g = \left(\sum \lambda_i\right) wg = \left(\sum \lambda_i\right) w.$$

所以 ϑ 为一个 FG-同态. 这里,

$$\mathrm{Ker}\vartheta = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0\right\},$$
$$\mathrm{Im}\vartheta = W.$$

根据命题 7.2, $\mathrm{Ker}\vartheta$ 是置换模 V 的一个 FG-子模.

同构 FG-模

7.4 定义

令 V, W 为 FG-模. 我们称函数 $\vartheta: V \to W$ 为 FG-同构, 如果 ϑ 是 FG-同态并且 ϑ 可逆. 如果存在这样的 FG-同构, 那么称 V 和 W 是同构的 FG-模, 并记为 $V \cong W$.

接下来将验证, 如果 $V \cong W$, 那么 $W \cong V$.

7.5　命题

若 $\vartheta : V \to W$ 是 FG-同构, 那么它的逆 $\vartheta^{-1} : W \to V$ 也是 FG-同构.

证明　显然 ϑ^{-1} 是可逆的线性变换, 所以只需要证明 ϑ^{-1} 是 FG-同态. 对 $w \in W, g \in G$,

$$\begin{aligned}((w\vartheta^{-1})g)\vartheta &= ((w\vartheta^{-1})\vartheta)g \qquad \text{因为 } \vartheta \text{ 是一个 } FG\text{-同态}\\ &= wg\\ &= ((wg)\vartheta^{-1})\vartheta.\end{aligned}$$

因此 $(w\vartheta^{-1})g = (wg)\vartheta^{-1}$. 证毕.

假设 $\vartheta : V \to W$ 为 FG-同构. 那么可以利用 ϑ 和 ϑ^{-1} 在同构 FG-模 V 和 W 之间来回转换, 并且证明 V 和 W 具有同样的结构性质. 下面列举一些例子:

(1) $\dim V = \dim W$(因为 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的一组基当且仅当 $v_1\vartheta, \ldots, v_n\vartheta$ 是 W 的一组基);

(2) V 是不可约的当且仅当 W 是不可约的 (因为 X 是 V 的一个 FG-子模当且仅当 $X\vartheta$ 是 W 的一个 FG-子模);

(3) V 包含一个平凡 FG-子模当且仅当 W 包含一个平凡 FG-子模 (因为 X 是 V 的一个平凡 FG-子模当且仅当 $X\vartheta$ 是 W 的一个平凡 FG-子模).

就像我们经常把同构的群看做是完全相同的, 我们经常不去区分同构的 FG-模. 目前, 我们继续简单地强调同构 FG-模之间的相似之处. 接下来将会说明与同构的 FG-模相对应的是等价表示.

7.6　定理

假设 V 是一个基为 $\mathscr{B}$ 的 FG-模, W 是一个基为 $\mathscr{B}'$ 的 FG-模. 那么 V 与 W 同构当且仅当表示

$$\rho : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}} \text{与} \sigma : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}'}$$

是等价的.

证明　首先构建下面的事实:

(7.7)　FG-模 V 与 W 同构当且仅当存在 V 的一组基 $\mathscr{B}_1$ 与 W 的一组基 $\mathscr{B}_2$ 使得

$$[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}, \quad \text{对任意的} g \in G.$$

为证明这一点, 假设 ϑ 是从 V 到 W 的一个 FG-同构, 并设 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的一组基 $\mathscr{B}_1$; 那么 $v_1\vartheta, \ldots, v_n\vartheta$ 是 W 的一组基 $\mathscr{B}_2$. 令 $g \in G$. 因为对每个 i 有 $(v_ig)\vartheta = (v_i\vartheta)g$, 所以 $[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}$.

反过来, 设 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的一组基 $\mathscr{B}_1$, 设 $w_1, \ldots, w_n$ 是 W 的一组基 $\mathscr{B}_2$, 并对任意的 $g \in G$ 使得 $[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}$ 成立. 令 ϑ 是从 V 到 W 的可逆线性变换, 使得对任意的 i 有 $v_i\vartheta = w_i$. 令 $g \in G$. 因为 $[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}$, 可以推出对任意的 i 有 $(v_i g)\vartheta = (v_i\vartheta)g$, 因此 ϑ 是一个 FG-同构. (7.7) 证毕.

现在假设 V 与 W 是同构的 FG-模. 根据 (7.7), 存在 V 的一组基 $\mathscr{B}_1$ 和 W 的一组基 $\mathscr{B}_2$ 使得对任意的 $g \in G$ 有 $[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}$. 定义 G 的一个表示 ϕ 为 $\phi : g \to [g]_{\mathscr{B}_1}$. 那么根据定理 4.12(1),$\phi$ 与 ρ 和 σ 都等价. 因此, ρ 与 σ 等价.

反过来, 假设 ρ 与 σ 等价的. 根据定理 4.12(2), 存在 V 的一组基 $\mathscr{B}''$ 使得对任意的 $g \in G$, 有 $g\sigma = [g]_{\mathscr{B}''}$; 也就是, 对任意的 $g \in G$, 有 $[g]_{\mathscr{B}'} = [g]_{\mathscr{B}''}$. 根据 (7.7), 所以 V 与 W 是同构的 FG-模. 证毕.

7.8 例子

令 $G = \langle a : a^3 = 1 \rangle$, 一个 3 阶的循环群, 令 W 为它的正则 FG-模. 那么 $1, a, a^2$ 为 W 的一组基, 记为 $\mathscr{B}'$. 有

$$[1]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [a]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [a^2]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

相比较例 4.11 在定义的 FG-模 V, 有基 v_1, v_2, v_3 使得

$$v_1 a = v_2, \quad v_2 a = v_3, \quad v_3 a = v_1.$$

记 V 的基 v_1, v_2, v_3 为 $\mathscr{B}$, 有

$$[g]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}'}, \quad \text{对任意的} g \in G.$$

根据 (7.7), FG-模 V 与 W 是同构的. 确实, 函数

$$\vartheta : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \mapsto \lambda_1 1 + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 \quad (\lambda_i \in F)$$

是从 V 到 W 的一个 FG-同构.

7.9 例子

令 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. 在例 3.4(1) 中我们遇到了 G 的两个等价表示 ρ 和 σ, 其中

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

和

$$a\sigma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 V 是基为 v_1, v_2 的 $\mathbb{C}G$-模, 其中

$$v_1 a = v_2, \quad v_1 b = v_1,$$
$$v_2 a = -v_1, \quad v_2 b = -v_2$$

(参看例 4.5(1)). 类似地, 令 W 是基为 w_1, w_2 的 $\mathbb{C}G$-模, 其中

$$w_1 a = iw_1, \quad w_1 b = w_2,$$
$$w_2 a = -iw_2, \quad w_2 b = w_1.$$

这样, 若记 V 的基 v_1, v_2 为 $\mathscr{B}$, 记 W 的基 w_1, w_2 为 $\mathscr{B}'$, 那么对任意的 $g \in G$, 有

$$\rho : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}} \text{ 和 } \sigma : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}'}.$$

根据定理 7.6, $\mathbb{C}G$-模 V 与 W 是同构的, 因为 ρ 与 σ 是等价的. 为了直接证明这一点, 令 $\vartheta : V \to W$ 为使得

$$\vartheta: \quad v_1 \mapsto w_1 + w_2,$$
$$v_2 \mapsto iw_1 - iw_2$$

成立的可逆线性变换. 那么 $(v_j a)\vartheta = (v_j\vartheta)a$ 且 $(v_j b)\vartheta = (v_j\vartheta)b$, 其中 $j = 1, 2$. 因此, ϑ 是从 V 到 W 的 $\mathbb{C}G$-同构 (对比例 3.4(1)).

直　　和

这章的最后讨论 FG-模的直和, 并说明由此引出的 FG-同态.

令 V 为一个 FG-模, 并假设

$$V = U \oplus W,$$

其中 U 和 W 是 V 的 FG-子模. 令 $u_1, \ldots, u_m$ 是 U 的一组基, 记为 $\mathscr{B}_1$, 令 $w_1, \ldots, w_n$ 是 W 的一组基, 记为 $\mathscr{B}_2$. 那么根据 (2.9), $u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ 是 V 的一组基, 记为 $\mathscr{B}$, 并且, 对任意的 $g \in G$, 有

$$[g]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|c} [g]_{\mathscr{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [g]_{\mathscr{B}_2} \end{array} \right).$$

更一般地, 若 $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ 为 FG-子模 U_i 的直和, 且 $\mathscr{B}_i$ 是 U_i 的一组基, 那么可以将 $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_r$ 组成 V 的一组基 $\mathscr{B}$, 对任意的 $g \in G$, 有

(7.10)

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} [g]_{\mathscr{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [g]_{\mathscr{B}_r} \end{pmatrix}.$$

接下来的结论将说明由直和自然引出的 FG-同态.

7.11　命题

令 V 是一个 FG-模, 并设

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r.$$

其中每个 U_i 都是 V 的 FG-子模. 对 $v \in V$ 有唯一的向量 $u_i \in U_i$, 使得 $v = u_1 + \ldots + u_r$, 定义 $\pi_i : V \to V (1 \leqslant i \leqslant r)$ 通过

$$v\pi_i = u_i.$$

那么每个 π_i 都是一个 FG-同态, 也是 V 的一个投射.

证明　显然, π_i 是一个线性变换; 并且 π_i 是一个 FG-同态, 因为对 $v \in V$ 有 $v = u_1 + \ldots + u_r$(对任意的 j 有 $u_j \in U_j$ 成立), 对 $g \in G$, 有

$$(vg)\pi_i = (u_1 g + \ldots + u_r g)\pi_i = u_i g = (v\pi_i)g.$$

并且

$$v\pi_i^2 = u_i \pi_i = u_i = v\pi_i,$$

所以 $\pi_i^2 = \pi_i$. 所以 π_i 是一个投射 (参看定义 2.30). 证毕.

现在提出一个关于不可约 FG-模的和的技术性的结论, 这个结论在后面将会用到.

7.12　命题

令 V 是一个 FG-模, 并设

$$V = U_1 + \ldots + U_r,$$

其中每个 U_i 都是 V 的不可约 FG-子模. 那么 V 是某些 FG-子模 U_i 的直和.

证明　证明的思想是从 $U_1, \ldots, U_r$ 中选出尽可能多的 FG-子模使得我们选出的 FG-子模的和是直和. 为了达到这个目的, 选出 $\{U_1, \ldots, U_r\}$ 的一个子集 $Y = \{W_1, \ldots, W_s\}$, 使得

$$W_1 + \ldots + W_s \text{是直和} \quad (\text{即等于} W_1 \oplus \ldots \oplus W_s),$$

但

$$W_1 + \ldots + W_s + U_i \text{不是直和}, \quad \text{如果} U_i \notin Y.$$

令

$$W = W_1 + \ldots + W_s.$$

我们断言对任意的 i 有 $U_i \subseteq W$. 若 $U_i \in Y$, 显然成立. 所以不妨假设 $U_i \notin Y$. 那么 $W + U_i$ 不是一个直和, 所以 $W \cap U_i \neq \{0\}$. 但 $W \cap U_i$ 是 U_i 的一个 FG-子模, 且 U_i 是不可约的; 所以 $W \cap U_i = U_i$, 所以 $U_i \subseteq W$ 成立.

因为对任意的 i 有 $U_i \subseteq W$, 其中 $1 \leqslant i \leqslant r$, 有 $V = W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$. 证毕.

最后, 如果 $V_1, \ldots, V_r$ 是 FG-模, 对任意的 $v_i \in V_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ 和任意的 $g \in G$, 通过定义

$$(v_1, \ldots, v_r)g = (v_1 g, \ldots, v_r g),$$

可以将外直和 $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$(参看第 2 章) 作成一个 FG-模.

第 7 章总结

1. 若 V 和 W 是 FG-模, $\vartheta : V \to W$ 是一个线性变换, 对任意的 $v \in V, g \in G$ 满足

$$(vg)\vartheta = (v\vartheta)g,$$

那么 ϑ 是一个 FG-同态.

2. FG-同态的像与核是 FG-模.

3. 同构的 FG-模与等价表示相对应.

第 7 章习题

1. 设 U, V 和 W 是 FG-模, $\vartheta : U \to V$ 和 $\phi : V \to W$ 是 FG-同态. 证明 $\vartheta\phi : U \to W$ 是一个 FG-同态.

2. 设 G 是由 (12345) 生成的 S_5 的子群. 证明 G 在 F 上的置换模与正则 FG-模同构.

3. 假设 V 是一个 FG-模. 证明子集

$$V_0 = \{v \in V : vg = v, \quad \text{对任意的} g \in G\}$$

是 V 的一个 FG-子模. 说明函数

$$\vartheta : v \mapsto \sum_{g \in G} vg \quad (v \in V)$$

是从 V 到 V_0 的一个 FG-同态. 它一定是满射吗?

4. 设 V 与 W 是同构的 FG-模. 定义 V 和 W 的 FG-子模 V_0 与 W_0 同第 3 题. 证明 V_0 与 W_0 是同构的 FG-模.

5. 设 G 是由 (12) 与 (34) 生成的 S_4 的子群. G 在 F 上的置换模是否与正则 FG-模同构?

6. 令 $G = C_2 = \langle x : x^2 = 1 \rangle$.

(a) 说明函数

$$\vartheta : \alpha 1 + \beta x \mapsto (\alpha - \beta)(1 - x) \quad (\alpha, \beta \in F)$$

是一个从正则 FG-模到其自身的 FG-同态.

(b) 证明 $\vartheta^2 = 2\vartheta$.

(c) 找到 FG 的一组基 $\mathscr{B}$, 使得

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

第 8 章　Maschke 定理

现在开始研究表示理论中的第一个主要的结果, 即 Maschke 定理. 这个定理的一个结果是每个 FG-模是不可约的 FG-子模的一个直和, 其中像往常一样, 假设 $F=\mathbb{C}$ 或 $F=\mathbb{R}$ (F 的假设是重要的, 见下面的例 8.2(2)). 这样我们把表示理论的研究归结到对不可约的 FG-模的研究.

Maschke 定理

8.1　Maschke 定理

令 G 是一个有限群, $F=\mathbb{C}$ 或 $F=\mathbb{R}$, V 是一个 FG-模. 如果 U 是 V 的一个 FG-子模, 那么存在 V 的一个 FG-子模 W 使得

$$V=U\oplus W.$$

在证明 Maschke 定理之前, 举一些例子来说明.

8.2　例子

(1) 令 $G=S_3$, $V=sp(v_1,v_2,v_3)$ 是 G 在 F 上的置换模 (见定义 4.10). 令

$$u=v_1+v_2+v_3,\quad U=sp(u).$$

那么 U 是 V 的一个 FG-子模, 因为对于所有的 $g\in G$, 有 $ug=u$ 成立.

存在很多 V 的子空间 W 使得 $V=U\oplus W$, 例如 $sp(v_2,v_3)$, $sp(v_1,v_2-2v_3)$. 但是, 事实上, 只有一个 V 的 FG-子模 W 使得 $V=U\oplus W$ 成立. 我们会在证明了 Maschke 定理之后在例子中找出这个 W(读者也可以现在自己找出来).

(2) 如果 $F\neq\mathbb{C}$ 且 $F\neq\mathbb{R}$, 那么 Maschke 定理可能不成立. 例如, 令 p 是一个素数, 令 $G=C_p=\langle a:a^p=1\rangle$, 设 F 是整数模 p 的域. 验证函数

$$a^j\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\j&1\end{pmatrix}\quad(j=0,1,\ldots,p-1)$$

是从 G 到 $GL(2,F)$ 的一个表示. 相应的 FG-模是 $V=sp(v_1,v_2)$, 其中, 对于 $0\leqslant j\leqslant p-1$, 有

$$v_1a^j=v_1,$$

$$v_2a^j = jv_1 + v_2.$$

显然 $U = sp(v_1)$ 是 V 的一个 FG-子模. 但是没有 V 的 FG-子模 W 使得 $V = U \oplus W$ 成立, 因为很容易看到 U 是 V 的唯一一个一维 FG-子模.

Maschke 定理 8.1 的证明 给定 U 是 FG-模 V 的一个 FG-子模, 选择 V 的任意一个子空间 W_0 使得

$$V = U \oplus W_0$$

(有很多种选择 W_0 的方法: 设 $v_1, \ldots, v_m$ 是 U 的一组基, 把它扩充成 V 的一组基 $v_1, \ldots, v_n$, 并令 $W_0 = sp(v_{m+1}, \ldots, v_n)$).

对于 $v \in V$, 存在唯一的向量 $u \in U, w \in W_0$ 使得 $v = u + w$. 定义 $\phi : V \to V$ 使得 $v\phi = u$. 由命题 2.29, ϕ 是 V 的一个投射, 核是 W_0, 像是 U.

我们的目标是对投射 ϕ 进行修改, 变成一个 $V \to V$ 的 FG-同态, 并且这个同态的像是 U. 为了这个目的, 如下定义 $\vartheta : V \to V$

(8.3) $$v\vartheta = \frac{1}{|G|} \textstyle\sum_{g \in G} vg\phi g^{-1} \quad (v \in V).$$

显然 ϑ 是 V 的一个自同态, 并且有 $\mathrm{Im}\vartheta \subseteq U$. 先说明 ϑ 是一个 FG-同态. 对于 $v \in V, x \in G$,

$$(vx)\vartheta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (vx)g\phi g^{-1}.$$

因为 g 跑遍了 G 的所有的元素, 所以 $h = xg$ 也跑遍了 G 的所有的元素. 因此

$$(vx)\vartheta = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} vh\phi h^{-1}x = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} vh\phi h^{-1} \right) x = (v\vartheta)x.$$

因此 ϑ 是一个 FG-同态.

下面证明 $\vartheta^2 = \vartheta$. 首先注意到对于 $u \in U, g \in G$, 有 $ug \in U$, 所以 $(ug)\phi = ug$. 有了这个我们就有

(8.4) $$u\vartheta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} ug\phi g^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ug)g^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u = u.$$

现在令 $v \in V$, 那么 $v\vartheta \in U$, 所以由 (8.4) 有 $(v\vartheta)\vartheta = v\vartheta$. 因此 $\vartheta^2 = \vartheta$.

我们现在建立的 $\vartheta : V \to V$ 是 V 的一个投射, 同时也是一个 FG-同态. 并且 (8.4) 表明了 $\mathrm{Im}\vartheta = U$. 令 $W = \mathrm{Ker}\vartheta$. 那么由命题 7.2 可知 W 是 V 的一个 FG-子模, 并且由命题 2.32 得到 $V = U \oplus W$.

到此为止完成了 Maschke 定理的证明. 证毕.

8.5　例子

令 $G=S_3$, $V=sp(v_1,v_2,v_3)$ 是置换模, $U=sp(v_1+v_2+v_3)$ 是它的子模, 像在例 8.2(1) 中定义的那样. 我们利用 Maschke 定理的证明来找到 V 的一个 FG-子模 W 使得 $V=U\oplus W$.

首先, 令 $W_0=sp(v_1,v_2)$. 那么 $V=U\oplus W_0$(显然有 W_0 不是一个 FG-子模). V 到 U 上的一个投射 ϕ 由以下式子给出:

$$\phi: v_1\mapsto 0, v_2\mapsto 0, v_3\mapsto v_1+v_2+v_3.$$

现在验证由 (8.3) 给出的 FG-同态 ϑ 是

$$\vartheta: v_i\mapsto \frac{1}{3}(v_1+v_2+v_3)\quad (i=1,2,3).$$

所求的 FG-子模 W 是 $\mathrm{Ker}\vartheta$, 所以

$$W=sp(v_1-v_2,v_2-v_3)$$

(事实上, $W=\left\{\sum\lambda_i v_i:\sum\lambda_i=0\right\}$, 这就是在例 7.3(3) 中建立的 FG-子模).

注意到如果 $\mathscr{B}$ 是 V 的基 $v_1+v_2+v_3, v_1, v_2$, 那么对于所有的 $g\in G$ 来说, 矩阵 $[g]_{\mathscr{B}}$ 的形式是

$$[g]_{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}\blacksquare & 0 & 0\\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\end{pmatrix}.$$

那些零反映了 U 是 V 的一个 FG-子模的事实 (见 (5.4)). 如果使用 $v_1+v_2+v_3, v_1-v_2, v_2-v_3$ 作为一组基 $\mathscr{B}'$, 那么得到

$$[g]_{\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}\blacksquare & 0 & 0\\ 0 & \blacksquare & \blacksquare\\ 0 & \blacksquare & \blacksquare\end{pmatrix},$$

因为 $sp(v_1-v_2,v_2-v_3)$ 也是 V 的一个 FG-子模.

这个例子说明了 Maschke 定理的矩阵形式: 对于任意的一个有限群 G, 如果选定了一个 FG-模 V 的一组基 $\mathscr{B}$ 使得对于所有的 $g\in G$(见 (5.4)), $[g]_{\mathscr{B}}$ 的形式是

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0\\ \hline * & *\end{array}\right),$$

那么可以找到一组基 $\mathscr{B}'$ 使得对于所有的 $g\in G$, $[g]_{\mathscr{B}'}$ 的形式是

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0\\ \hline 0 & *\end{array}\right).$$

现在我们用另一个形式表达这个问题, 假设 ρ 是一个有限群 G 在 F 上的一个次数为 n 的不可约表示. 那么我们知道存在矩阵 X_g, Y_g, Z_g 使得 ρ 等价于有如下形式的一个表示

$$g \mapsto \left(\begin{array}{c|c} X_g & 0 \\ \hline Y_g & Z_g \end{array}\right) \quad (g \in G),$$

其中 X_g 是 $k \times k$ 阶的矩阵, 并有 $0 < k < n$.

Maschke 定理进一步地表达了 ρ 等价于有如下形式的一个表示:

$$g \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A_g & 0 \\ \hline 0 & B_g \end{array}\right).$$

其中 A_g 也是一个 $k \times k$ 阶的矩阵.

Maschke 定理的一些结果

我们现在使用 Maschke 定理来说明每个非零的 FG-模是一些不可约的 FG-子模的直和.

8.6　定义

设 V 是一个 FG-模, 如果 $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$, 其中 U_i 是 V 的一个不可约 FG-子模, 那么就说 V 是完全可约的.

8.7　定理

如果 G 是一个有限群, $F = \mathbb{R}$ 或 $F = \mathbb{C}$, 那么每个非零的 FG-模是完全可约的.

证明　令 V 是一个非零的 FG-模. 对 $\dim V$ 使用数学归纳法来证明. 如果 $\dim V = 1$, 那么结论显然成立, 因为在这种情况下 V 是不可约的.

如果 V 是不可约的, 那么结果显然成立, 所以假设 V 是可约的. 那么 V 有一个不是 $\{0\}$ 也不是 V 的 FG-子模 U. 由 Maschke 定理, 存在 V 的一个 FG-子模 W 使得 $V = U \oplus W$. 因为 $\dim U < \dim V, \dim W < \dim V$, 由归纳得到

$$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r, \quad W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s,$$

其中每个 U_i, W_j 是一个不可约的 FG-模. 那么由 (2.10),

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_s,$$

不可约 FG-模的一个直和. 证毕.

Maschke 定理的另一个有用的结论是下面这个命题.

8.8 命题

令 V 是一个 FG-模, 其中 $F=\mathbb{R}$ 或 $F=\mathbb{C}$, G 是一个有限群. 假设 U 是 V 的一个 FG-子模, 那么存在一个从 V 到 U 上的满 FG-同态.

证明 由 Maschke 定理, 存在 V 的一个 FG-子模 W 使得 $V=U\oplus W$. 那么如下定义函数 $\pi: V\to U$

$$\pi: u+w\mapsto u \quad (u\in U, w\in W)$$

由命题 7.11 得它是一个从 V 到 U 上的一个 FG-同态. 证毕.

定理 8.7 告诉我们每个非零的 FG-模是一些不可约的 FG-模的直和. 因此, 为了弄懂 FG-模, 我们必须集中研究不可约的 FG-模. 下一章开始研究不可约的 FG-模.

第 8 章总结

假设 G 是一个有限群, $F=\mathbb{R}$ 或 $F=\mathbb{C}$.

1. Maschke 定理告诉我们对于一个 FG-模 V 的每个 FG-子模 U 来说, 存在 V 的一个 FG-子模 W 使得

$$V=U\oplus W.$$

2. 每个非零的 FG-模 V 是一些不可约的 FG-模的直和:

$$V=U_1\oplus\ldots\oplus U_r.$$

第 8 章习题

1. 令 $G=\langle x: x^3=1\rangle\cong C_3$, V 是二维 $\mathbb{C}G$-模, V 的一组基是 v_1, v_2, 其中

$$v_1x=v_2, \quad v_2x=-v_1-v_2.$$

(由习题 3.2 知道, 这是一个 $\mathbb{C}G$-模.)

把 V 表示成一些不可约的 FG-模的直和.

2. 如果 $G=C_2\times C_2$, 把群代数 $\mathbb{R}G$ 表示成一维的 $\mathbb{R}G$-子模的直和.

3. 找一个群 G, 一个 $\mathbb{C}G$-模 V 和一个 $\mathbb{C}G$-同态 $\vartheta: V\to V$, 使得 $V\neq \mathrm{Ker}\vartheta\oplus\mathrm{Im}\vartheta$.

4. 令 G 是一个有限群, $\rho: G\to GL(2,\mathbb{C})$ 是 G 的一个表示. 假设存在元素 $g,h\in G$ 使得矩阵 $g\rho, h\rho$ 不交换. 证明 ρ 是不可约的 (可以参照例 5.5(2) 和习题 5.1, 5.3, 5.4, 6.6 来证明这个结果).

5. 假设 G 是无限群

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

V 是 $\mathbb{C}G$-模 $\mathbb{C}^2$, 其中的乘法是 G 中元素的自然乘法 (使得对于 $v \in V, g \in G$, 向量 vg 是行向量 v 和矩阵 g 的积).

证明 V 不是完全可约的 (这表明了在无限群的情况下 Maschke 定理是不成立的, 与例 8.2(2) 相比较).

6. Maschke 定理对于 $\mathbb{C}G$-模来说的另一种证明.

令 V 是 $\mathbb{C}G$-模, 基是 $v_1, \ldots, v_n$, 假设 U 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模. 用如下方式定义 V 上的一个复内积 $(\ ,\ )$: 对于 $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i}.$$

用如下方式定义另一个 V 上的复内积 $[\ ,\ ]$:

$$[u, v] = \sum_{x \in G} (ux, vx) \quad (u, v \in V).$$

(1) 证明 $[\ ,\ ]$ 是一个复内积, 对于所有的 $u, v \in V, g \in G$ 满足

$$[ug, vg] = [u, v].$$

(2) 假设 U 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模, 定义

$$U^{\perp} = \{v \in V : [u, v] = 0, \quad \forall u \in U\}.$$

证明 $U^{\perp}$ 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模.

(3) 证明 Maschke 定理(提示: 复内积的一个很好的性质是对于 V 的所有的子空间 U 来说, 有 $V = U \oplus U^{\perp}$).

7. 证明对于每个有限单群 G 来说, 存在一个不可约的忠实 $\mathbb{C}G$-模.

第 9 章　Schur 引理

Schur 引理是关于不可约模的基础结果, 尽管它的结论与证明都非常简单, 但是它却是群表示理论的基本引理, 我们将通过确定有限 Abel 群的所有不可约表示给出该引理的一个应用.

Schur 引理涉及的是 $\mathbb{C}G$-模而不是 $\mathbb{R}G$-模的, 并且它是许多后面的理论的依据, 因此本书的其余部分讨论的模均为 $\mathbb{C}G$-模 (第 23 章除外).

本章中均假定 G 是有限群.

Schur 引理

9.1　Schur 引理

假设 V 和 W 是不可约的 $\mathbb{C}G$-模.

(1) 若 $\vartheta: V \to W$ 是一个 $\mathbb{C}G$-同态, 则或者 ϑ 是一个 $\mathbb{C}G$-同构, 或者对于所有的 $v \in V$ 有 $v\vartheta = 0$.

(2) 若 $\vartheta: V \to V$ 是一个 $\mathbb{C}G$-同构, 则 ϑ 是一个数乘变换.

证明　(1) 假设存在 $v \in V$ 使得 $v\vartheta \neq 0$, 那么 $\mathrm{Im}\vartheta \neq \{0\}$. 根据命题 7.2 可知 $\mathrm{Im}\vartheta$ 是 W 的一个 $\mathbb{C}G$-子模, 由于 W 是不可约的, 故 $\mathrm{Im}\vartheta = W$. 同样地, 根据命题 7.2 可知 $\mathrm{Ker}\vartheta$ 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模, 由于 $\mathrm{Ker}\vartheta \neq V$ 并且 V 是不可约的, 则 $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$. 因此 ϑ 是可逆的, 从而它是一个 $\mathbb{C}G$-同构.

(2) 根据 (2.26), 由于选取的是复数域, 从而自同态 ϑ 有一个特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$, 因此 $\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) \neq \{0\}$. 从而 $\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V)$ 是 V 的一个非零的 $\mathbb{C}G$-子模. 由于 V 是不可约的, 从而 $\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) = V$. 因此

$$v(\vartheta - \lambda 1_V) = 0 \quad \text{对于所有的} v \in V.$$

即 $\vartheta = \lambda 1_V$. 证毕.

Schur 引理的第二部分有如下的逆命题.

9.2　命题

令 V 表示一个非零的 $\mathbb{C}G$-模, 并假定每一个从 V 到 V 的 $\mathbb{C}G$-同态均是一个数乘变换, 那么 V 是不可约的.

证明 假设 V 是可约的, 那么 V 有一个 $\mathbb{C}G$-子模 U 既不等于 V 也不等于 $\{0\}$. 因此根据 Maschke 定理, 存在 V 的 $\mathbb{C}G$-子模 W 使得

$$V = U \oplus W.$$

从而定义为 $(u+w)\pi = u$ (对于所有的 $u \in U, w \in W$) 的投射 $\pi: V \to V$ 是一个 $\mathbb{C}G$-同态 (见命题 7.11), 这个模同态不是数乘变换, 从而推出矛盾, 因此 V 是不可约的. 证毕.

下面我们采用表示的语言来解释 Schur 引理和它的逆定理.

9.3 推论

令 ρ: $G \to GL(n, \mathbb{C})$ 是群 G 的一个表示. 那么 ρ 不可约当且仅当每一个满足

$$(g\rho)A = A(g\rho) \quad 对于所有的 g \in G$$

的 $n \times n$ 矩阵 A 都是数乘矩阵, 即 $A = \lambda I_n$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$.

证明 如定理 4.4(1), 对于所有的 $v \in \mathbb{C}^n, g \in G$ 通过定义 $vg = v(g\rho)$, 从而将 $\mathbb{C}^n$ 看做是一个 $\mathbb{C}G$-模.

令 A 是数域 $\mathbb{C}$ 上的一个 $n \times n$ 矩阵. 那么 $\mathbb{C}^n$ 上的一个自同态 $v \to vA$ 是一个 $\mathbb{C}G$-模同态当且仅当

$$(vg)A = (vA)g \quad 对于所有的 v \in \mathbb{C}^n, g \in G;$$

从而当且仅当

$$(g\rho)A = A(g\rho) \quad 对于所有的 g \in G.$$

从而根据 Schur 引理 9.1 与命题 9.2 便可得推论成立. 证毕.

9.4 例子

(1) 令 $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$, 假设 ρ: $G \to GL(2, \mathbb{C})$ 是群 G 的一个表示, 且

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(见习题 3.2) 由于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

与所有的 $g\rho (g \in G)$ 都可交换, 由推论 9.3 便可知 ρ 是可约的.

(2) 令 $G = D_{10} = \langle a, b : a^5 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle, \omega = e^{2\pi i/5}$. 试验证存在一个群表示 ρ: $G \to GL(2, \mathbb{C})$ 使得

$$a\rho = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

现在假定存在一个矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

与 $a\rho$ 和 $b\rho$ 可交换, 则由 $(a\rho)A = A(a\rho)$, $(b\rho)A = A(b\rho)$ 可知 $\beta = \gamma = 0, \alpha = \delta$. 从而可知 $A = \alpha I$, 那么根据推论 9.3 便可知 ρ 是不可约的.

有限交换群的表示理论

令 G 是一个有限交换群, V 是 G 的一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模. 固定 $x \in G$. 由于 G 是一个交换群, 那么

$$vgx = vxg \quad 对于所有的 g \in G,$$

从而 V 的自同态 $v \mapsto vx$ 是一个 $\mathbb{C}G$-模同态. 利用 Schur 引理 9.1(2) 可知这个模同态是一个数乘变换, 定义为 $\lambda_x 1_V$. 即

$$vx = \lambda_x v \quad 对于所有的 v \in V.$$

这意味着 V 的每一个子空间都是一个 $\mathbb{C}G$-子模. 由于 V 是不可约的, 从而可知它是一维的向量空间, 因此我们证明了如下的命题.

9.5　命题

假设 G 是一个有限交换群, 那么它的每一个不可约 $\mathbb{C}G$-模均是一维的.

下面的结果是有限交换群的主结构定理. 在这里我们将不给出证明, 有兴趣的读者可以参看书末参考文献中 J.B.Fraleigh[2] 的教材的第九章.

9.6　定理

每一个有限交换群均可以表示为一系列循环群的直积.

下面将给出直积

$$C_{n_1} \times C_{n_2} \times \ldots \times C_{n_r}$$

的所有不可约表示, 其中 $n_1, \ldots, n_r$ 均是正整数. 由定理 9.6 可知, 它们包括了所有有限交换群的不可约表示.

令 $G = C_{n_1} \times C_{n_2} \times \ldots \times C_{n_r}$, 并且对于 $1 \leqslant i \leqslant r$, 假定 c_i 是 C_{n_i} 的一个生成元. 记

$$g_i = (1, \ldots, c_i, \ldots, 1) \quad (\text{其中}c_i\text{是第}i\text{个分量}).$$

那么

$$G = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle, \quad \text{其中}g_i^{n_i} = 1 \text{ 且 } g_i g_j = g_j g_i\text{对于所有的}i, j.$$

现在假设 ρ: $G \to GL(n, \mathbb{C})$ 是群 G 在数域 $\mathbb{C}$ 中的一个不可约表示. 则根据命题 9.5 可知 $n = 1$, 从而对于所有的 $1 \leqslant i \leqslant r$, 存在一个复数 λ_i 使得

$$g_i \rho = (\lambda_i).$$

由于 g_i 的阶数是 n_i, 从而 $\lambda_i^{n_i} = 1$; 即 λ_i 是一个 n_i 次单位根. 由于对于群 G 中的每一个元素 g, 有 $g = g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r}$ 其中 $i_1, \ldots, i_r$ 是一些整数, 从而 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 的值决定了 ρ 的形式, 且

(9.7)
$$g\rho = (g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r})\rho = (\lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_r^{i_r}).$$

群 G 满足公式 (9.7) 的表示 ρ 可以记为 $\rho = \rho_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$. 反过来, 任意给定 n_i 次单位根 $\lambda_i (1 \leqslant i \leqslant r)$, 函数

$$g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r} \mapsto (\lambda_1^{i_1}, \ldots, \lambda_r^{i_r})$$

也是群 G 的一个表示. 因此群 G 共有 $n_1 n_2 \ldots n_r$ 种表示, 并且它们互不等价.

从而我们证明了如下定理.

9.8　定理

令 G 为一个交换群 $C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}$. 那么上面所构造的关于群 G 的表示 $\rho_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ 均是次数为 1 的不可约表示. 这样的表示共有 $|G|$ 个, 并且群 G 在 $\mathbb{C}$ 上的任意一个不可约表示必然等价于它们中的一个.

9.9　例子

(1) 令 $G = C_n = \langle a : a^n = 1 \rangle$, $\omega = e^{2\pi i/n}$. 则群 G 在 $\mathbb{C}$ 上的 n 个不可约表示为 ρ_{ω^j} $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$, 其中

$$a^k \rho_{\omega^j} = (\omega^{jk}) \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1).$$

(2) 群 $G = C_2 \times C_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$ 的四个不可约 $\mathbb{C}G$-模为 V_1, V_2, V_3, V_4, 其中 V_i 是一个基为 v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ 的一维空间并且

$$v_1 g_1 = v_1, v_1 g_2 = v_1;$$ [①]

$$v_2 g_1 = v_2, v_2 g_2 = -v_2;$$

①原书为"$v_1 g_2 = v_2$", 译者修正为"$v_1 g_2 = v_1$".

$$v_3g_1 = -v_3, v_3g_2 = v_3;$$

$$v_4g_1 = -v_4, v_4g_2 = -v_4.$$

对 角 化

令 $H = \langle g \rangle$ 为一个 n 阶循环群, 并且假设 V 是一个非零 $\mathbb{C}H$-模. 根据定理 8.7, 对 V 可以做直和分解

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r,$$

其中 U_i 是 V 的不可约 $\mathbb{C}H$-子模. 根据命题 9.5 可知每一个 U_i 都是一维的; 假设向量 u_i 张成空间 U_i. 令 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi i/n}$. 那么对于任意的 i, 都存在一个正整数 m_i 使得

$$u_ig = \omega^{m_i}u_i.$$

假设 $\mathbb{B}$ 是 V 的一组基 $u_1, \ldots u_r$, 那么

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega^{m_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \omega^{m_r} \end{pmatrix}. \tag{9.10}$$

根据上面的推导可以得到下面的命题.

9.11 命题

令 G 是一个有限群, V 是一个 $\mathbb{C}G$-模. 若 $g \in G$, 那么存在 V 的一组基 $\mathscr{B}$ 使得矩阵 $[g]_{\mathscr{B}}$ 是对角阵. 进而, 如果 g 的阶数为 n, 那么该对角阵的对角线上的元素均为 n 次单位根.

证明 令 $H = \langle g \rangle$. 因为 V 也是 $\mathbb{C}H$-模, 由 (9.10) 即可得. 证毕.

Schur 引理的进一步的一些应用

下面给出 Schur 引理在群代数 $\mathbb{C}G$ 的一个重要的子空间上的一些应用.

9.12 定义

假设 G 是一个有限群. 那么群代数 $\mathbb{C}G$ 的中心, 记为 $Z(\mathbb{C}G)$, 被定义为

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zr = rz, \text{对于所有的 } r \in \mathbb{C}G\}.$$

根据 (2.5) 易知它是 $\mathbb{C}G$ 的一个子空间.

对于交换群 G 而言, $Z(\mathbb{C}G)$ 便是 $\mathbb{C}G$ 自身. 对于任意的群 G, 我们将看到 $Z(\mathbb{C}G)$ 对于了解群 G 的表示起着至关重要的作用 (例如, 在第 15 章中我们将会看到 $Z(\mathbb{C}G)$ 的维数与 G 的不可约表示的个数相同).

9.13 例子

显然元素 1 与 $\sum_{g\in G} g$ 是 $Z(\mathbb{C}G)$ 中的元素. 另外, 若假定 H 是 G 的一个正规子群, 那么

$$\sum_{h\in H} h \in Z(\mathbb{C}G).$$

因为假设 $z = \sum_{h\in H} h$. 那么对于任意的 $g \in G$, 有

$$g^{-1}zg = \sum_{h\in H} g^{-1}hg = \sum_{h\in H} h = z,$$

从而 $zg = gz$, 进而 $zr = rz$ 对于任意的 $r \in \mathbb{C}G$.

假设 $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, 那么 $\{1\}$, $\langle a\rangle$ 和 G 均是 G 的正规子群, 从而

$$1, 1 + a + a^2, 1 + a + a^2 + b + ab + a^2b$$

均是 $Z(\mathbb{C}G)$ 中的元素. 在以后我们将看到它们其实构成了 $Z(\mathbb{C}G)$ 的一组基.

下面将运用 Schur 引理证明 $Z(\mathbb{C}G)$ 中元素的一些重要的性质.

9.14 命题

假设 V 是一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模, 并且 $z \in Z(\mathbb{C}G)$, 则存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得

$$vz = \lambda v, \quad \text{对于任意的} v \in V.$$

证明 对于所有的 $r \in \mathbb{C}G$ 以及 $v \in V$, 有 $vrz = vzr$, 因此函数 $v \mapsto vz$ 是从 V 到 V 的一个 $\mathbb{C}G$-同态. 由 Schur 引理 9.1(2) 可知该 $\mathbb{C}G$-同态是一个数乘变换 $\lambda 1_V$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$, 从而命题得证. 证毕.

群代数 $\mathbb{C}G$ 中心中的一些元素来自于群 G 的中心, 下面将给出群 G 中心的定义.

9.15 定义

群 G 的中心记为 $Z(G)$, 其中

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz, \text{对于所有的} g \in G\}.$$

显然, $Z(G)$ 是群 G 的正规子群, 同时它也是 $Z(\mathbb{C}G)$ 的一个子集.

通过第 6 章的命题 6.6 我们已经知道对于任意的有限群 G, 必然存在一个忠实的 $\mathbb{C}G$-模, 但是群 G 不一定有忠实的不可约 $\mathbb{C}G$-模. 事实上, 下面的命题结论表明, 若群 G 具有忠实的不可约 $\mathbb{C}G$-模, 那么群 G 需具有更强的结构特征.

9.16 命题

若群 G 存在一个忠实的不可约 $\mathbb{C}G$-模, 那么 $Z(G)$ 是一个循环群.

证明 设 V 是一个忠实的不可约 $\mathbb{C}G$-模. 若 $z \in Z(G)$, 那么由命题 9.14 可知存在 $\lambda_z \in \mathbb{C}$ 使得

$$vz = \lambda_z v \quad \text{对于所有的} v \in V.$$

由于 V 是一个忠实的 $\mathbb{C}G$-模, 那么函数

$$z \mapsto \lambda_z \quad (z \in Z(G))$$

是从 $Z(G)$ 到非零复数形成的乘法群 $\mathbb{C}^*$ 的一个单的群同态. 因此 $Z(G) \cong \{\lambda_z : z \in Z(G)\}$ 是 $\mathbb{C}^*$ 的有限子群, 从而根据习题 1.7 可知 $Z(G)$ 是一个循环群. 证毕.

需要指出的是, 以上命题的逆命题并不成立, 在习题 25.6 中将给出一个群 G 使得 $Z(G)$ 是一个循环群, 但是它不存在忠实的不可约 $\mathbb{C}G$-模.

9.17 例子

假设群 G 是一个交换群, 则 $G = Z(G)$, 应用命题 9.16 从而它不存在忠实的不可约 $\mathbb{C}G$-模, 除非 G 是一个循环群. 例如, $C_2 \times C_2$ 就不存在忠实的不可约表示 (对比 9.9(2)).

非交换群的不可约表示比交换群的不可约表示更难构造, 特别地, 由下面关于命题 9.5 的逆命题的结论可知非交换群的不可约表示的次数不都是一维的.

9.18 命题

假设群 G 是一个有限群且它的每一个不可约 $\mathbb{C}G$-模均是一维的, 则 G 是一个交换群.

证明 根据定理 8.7, 可知

$$\mathbb{C}G = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n,$$

其中 V_i 是正则 $\mathbb{C}G$-模 $\mathbb{C}G$-的一个不可约 $\mathbb{C}G$-子模. 从而由条件可知对于任意的 i, 有 $\dim V_i = 1$. 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, 假设 v_i 是 V_i 的生成元. 从而 $v_1, \ldots v_n$ 是 $\mathbb{C}G$ 的一组基, 记为 $\mathscr{B}$. 则对于任意的 $x, y \in G$, 矩阵 $[x]_{\mathscr{B}}$ 与 $[y]_{\mathscr{B}}$ 均是对角阵, 从而 $[x]_{\mathscr{B}}$ 与 $[y]_{\mathscr{B}}$ 之间可以相互交换. 根据命题 6.6 可知, 表示

$$g \to [g]_{\mathscr{B}} (g \in G)$$

是群 G 的一个忠实表示, 从而可知 x 与 y 可以交换. 因此 G 是一个交换群, 定理得证. 证毕.

第 9 章总结

1. Schur 引理表明不可约 $\mathbb{C}G$-模之间的每一个 $\mathbb{C}G$-同态要么是零, 要么是一个 $\mathbb{C}G$-同构. 特别的, 从一个不可约 $\mathbb{C}G$-模到其自身的 $\mathbb{C}G$-同态均为数乘映射.

2. 群代数 $\mathbb{C}G$ 的中心 $Z(\mathbb{C}G)$ 是由可以与 $\mathbb{C}G$ 中的所有元素可交换的元素组成. $Z(\mathbb{C}G)$ 中的每一个元素在所有的不可约 $\mathbb{C}G$-模上的作用均为数乘变换.

3. 有限交换群 $\mathbb{C}$ 的所有不可约 $\mathbb{C}G$-模均是一维的, 且它共有 $|G|$ 个互不同构的不可约 $\mathbb{C}G$-模.

第 9 章习题

1. 写出群 $C_2, C_3, C_2 \times C_2$ 在数域 $\mathbb{C}$ 上的所有不可约表示.

2. 令 $G = C_4 \times C_4$.

(a) 找到群 G 一个非平凡的不可约表示 ρ 使得 $g^2\rho = (1)$ 对于所有的 $g \in G$.

(b) 证明不存在群 G 的不可约表示 σ 使得对于群 G 的所有二阶元 g 都有 $g\sigma = (-1)$.

3. 假设 G 是有限交换群 $C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}$. 证明 G 存在一个次数为 r 的忠实表示. 试分析群 G 是否存在次数小于 r 的忠实表示?

4. 假设群 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. 试验证在复数域 $\mathbb{C}$ 上存在群 G 的一个表示使得

$$a\rho = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

寻找所有的 2×2 的矩阵 M 使得对于所有的 $g \in G$ 有 $M(g\rho) = (g\rho)M$. 从而由此判定 ρ 是否为一个不可约表示.

对 G 的表示 σ 考虑上述同样问题, 其中

$$a\sigma = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad b\sigma = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. 证明若 V 是群 G 的一个不可约 $\mathbb{C}G$-模, 那么存在一个常数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得

$$v\left(\sum_{g\in G} g\right) = \lambda v \quad \text{对于所有的} v \in V.$$

6. 假设群 $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. 记 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}, W$ 是正则 $\mathbb{C}G$-模的一个不可约子模且

$$W = sp(1 + \omega^2 a + \omega a^2, b + \omega^2 ab + \omega a^2 b)(\text{参见习题6.6}).$$

(a) 证明 $a+a^{-1}\in Z(\mathbb{C}G)$.

(b) 寻找常数 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使得对于所有的 $w\in W$ 都有 $w(a+a^{-1})=\lambda w$(与命题 9.14 相比).

7. 试分析下列哪些群存在忠实的不可约表示:

(a) C_n, 其中 n 为正整数;

(b) D_8;

(c) $C_2\times D_8$;

(d) $C_3\times D_8$.

第 10 章　不可约模与群代数

设 G 是一个有限群, $\mathbb{C}G$ 是 G 在 $\mathbb{C}$ 上的群代数. 把 $\mathbb{C}G$ 看做正则 $\mathbb{C}G$-模. 根据定理 8.7, 我们可以写成

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r,$$

其中 U_i 是不可约 $\mathbb{C}G$-模. 这一章我们将要说明每一个不可约 $\mathbb{C}G$-模都可以在 $\mathbb{C}G$ 模 $U_1, \ldots, U_r$ 中找到一个与之同构. 因此, 只有有限个不同构的不可约 $\mathbb{C}G$-模 (在定理 9.8 中已经建立了对交换群而言的结论). 在理论上也可以找到所有不可约 $\mathbb{C}G$ 模, 足以将 $\mathbb{C}G$ 分解为不可约 $\mathbb{C}G$-子模的直和. 然而, 除非 G 是一个比较小的群, 否则这并不是找到不可约 $\mathbb{C}G$-模的实用方法.

$\mathbb{C}G$ 的不可约子模

我们从 Maschke 定理的另一个结果开始着手.

10.1　命题

设 V 与 W 为 $\mathbb{C}G$-模, $\vartheta : V \to W$ 为一个 $\mathbb{C}G$-同态. 那么存在 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模 U 使得 $V = \mathrm{Ker}\vartheta \oplus U$ 且 $U \cong \mathrm{Im}\vartheta$.

证明　根据命题 7.2, $\mathrm{Ker}\vartheta$ 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模, 由 Maschke 定理存在 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模 U 使得 $V = \mathrm{Ker}\vartheta \oplus U$. 定义函数 $\overline{\vartheta} : U \to \mathrm{Im}\vartheta$ 为

$$u\overline{\vartheta} = u\vartheta \quad (u \in U).$$

我们将说明 $\overline{\vartheta}$ 是从 U 到 $\mathrm{Im}\vartheta$ 的一个 $\mathbb{C}G$-同构. 因为 ϑ 是一个 $\mathbb{C}G$-同态, 显然 $\overline{\vartheta}$ 为 $\mathbb{C}G$-同态. 若 $u \in \mathrm{Ker}\overline{\vartheta}$, 那么 $u \in \mathrm{Ker}\vartheta \cap U = \{0\}$; 因此 $\mathrm{Ker}\overline{\vartheta} = \{0\}$. 现在令 $w \in \mathrm{Im}\vartheta$; 所以存在某个 $v \in V$ 有 $w = v\vartheta$. 记 $v = k + u$, 其中 $k \in \mathrm{Ker}\vartheta, u \in U$. 那么

$$w = v\vartheta = k\vartheta + u\vartheta = u\vartheta = u\overline{\vartheta}.$$

所以 $\mathrm{Im}\overline{\vartheta} = \mathrm{Im}\vartheta$. 因此 $\overline{\vartheta} : U \to \mathrm{Im}\vartheta$ 是一个可逆 $\mathbb{C}G$-同态. 所以 $U \cong \mathrm{Im}\vartheta$. 证毕.

10.2　命题

令 V 为一个 $\mathbb{C}G$-模, 并可写成

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s,$$

不可约 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的直和. 若 U 为 V 的任一个不可约 $\mathbb{C}G$-子模, 那么存在某个 i 有 $U \cong U_i$.

证明　对 $u \in U$, 有唯一确定的向量 $u_i \in U_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 使得 $u = u_1 + \ldots + u_s$. 定义 $\pi_i : U \to U_i$ 为 $u\pi_i = u_i$. 对某个 $u \in U$ 选择 i 使得 $u_i \neq 0$, 那么有 $\pi_i \neq 0$.

π_i 为一个 $\mathbb{C}G$-同态 (参看命题 7.11). 由于 U 和 U_i 是不可约的, 且 $\pi_i \neq 0$, 由 Schur 引理 9.1(1) 得, π_i 是一个 $\mathbb{C}G$-同构. 所以 $U \cong U_i$. 证毕.

当然, U 是 $U_1 \oplus \ldots, \oplus U_s$(每个 U_i 都不可约) 的一个不可约 $\mathbb{C}G$-子模, 但不等于任何一个 U_i, 这种情况是可能发生的. 接下来的例子将说明这一点.

10.3　例子

设 G 为任意群,V 是基为 v_1, v_2 的 2 维 $\mathbb{C}G$-模, 使得对任意的 $v \in V, g \in G$ 有 $vg = v$. 那么

$$V = U_1 \oplus U_2,$$

其中 $U_1 = sp(v_1)$ 和 $U_2 = sp(v_2)$ 是不可约 $\mathbb{C}G$-子模. 但是, $U = sp(v_1 + v_2)$ 是不可约 $\mathbb{C}G$-子模, 且不等于 U_1 也不等于 U_2.

10.4　定义

(1) 设 V 是一个 $\mathbb{C}G$-模, U 是一个不可约 $\mathbb{C}G$-模, 那么称 U 是 V 的一个合成因子, 如果 V 有一个 $\mathbb{C}G$-子模同构于 U.

(2) 称两个 $\mathbb{C}G$-模 V 和 W 有一个共同合成因子, 如果存在一个不可约 $\mathbb{C}G$-模既是 V 的合成因子又是 W 的合成因子.

现在讨论这章的主要结论, 这个结论说明的是每个不可约的 $\mathbb{C}G$-模都是正则 $\mathbb{C}G$-模的一个合成因子.

10.5　定理

把 $\mathbb{C}G$ 看做正则 $\mathbb{C}G$-模, 并可写成

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r,$$

不可约 $\mathbb{C}G$-子模的直和. 那么任意一个不可约 $\mathbb{C}G$-模与 $\mathbb{C}G$-模 U_i 的其中之一同构.

证明　令 W 为一个不可约 $\mathbb{C}G$-模, 选择一个非零向量 $w \in W$. 而 $\{wr : r \in \mathbb{C}G\}$ 是 W 的一个 $\mathbb{C}G$-子模; 由于 W 不可约, 那么

(10.6)
$$W = \{wr : r \in \mathbb{C}G\}.$$

现在定义 $\vartheta : \mathbb{C}G \to W$ 为

$$r\vartheta = wr \quad (r \in \mathbb{C}G).$$

显然 ϑ 是一个线性变换, 且由 (10.6) 有 $\mathrm{Im}\vartheta = W$. 此外, ϑ 是一个 $\mathbb{C}G$-同态, 因为对 $r, s \in \mathbb{C}G$, 有

$$(rs)\vartheta = w(rs) = (wr)s = (r\vartheta)s.$$

根据命题 10.1, 存在 $\mathbb{C}G$ 的一个 $\mathbb{C}G$-子模 U 使得

$$\mathbb{C}G = U \oplus \mathrm{Ker}\vartheta \text{且} U \cong \mathrm{Im}\vartheta = W.$$

由于 W 不可约, 所以 U 也是不可约的. 根据命题 10.2, 存在某个 i 有 $U \cong U_i$; 所以 $W \cong U_i$, 得证. 证毕.

定理 10.5 说明存在一个不可约 $\mathbb{C}G$-模的有限集合使得每个不可约 $\mathbb{C}G$-模同构于其中之一. 我们将这一事实写成如下推论.

10.7 推论

若 G 为一个有限群, 那么存在有限个非同构的不可约 $\mathbb{C}G$-模.

根据定理 10.5, 要找到所有不可约 $\mathbb{C}G$-模, 我们只需将正则 $\mathbb{C}G$-模分解成一个不可约 $\mathbb{C}G$-子模的直和形式. 现在对两个例子做直和分解, 但对于一般的 $\mathbb{C}G$-模这不是一个实用的方法.

10.8 例子

(1) 令 $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1\rangle$, 并记 $\omega = e^{2\pi i/3}$. 定义 $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{C}G$ 为

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 + a + a^2, \\ v_1 &= 1 + \omega^2 a + \omega a^2, \\ v_2 &= 1 + \omega a + \omega^2 a^2, \end{aligned}$$

且令 $U_i = sp(v_i), i = 0, 1, 2$. 那么 $v_1 a = a + \omega^2 a^2 + \omega 1 = \omega v_1$, 类似地,

$$v_i a = \omega^i v_i \quad \text{对} i = 0, 1, 2.$$

因此 U_i 是 $\mathbb{C}G$ 的一个 $\mathbb{C}G$-子模, 其中 $i = 0, 1, 2$.

容易验证 v_0, v_1, v_2 是 $\mathbb{C}G$ 的一组基, 因此

$$\mathbb{C}G = U_0 \oplus U_1 \oplus U_2,$$

不可约 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的直和. 根据定理 10.5, 每个不可约 $\mathbb{C}G$-模都同构于 U_0, U_1 或 U_2. 对应于 U_i 的 G 的不可约表示为例 9.9(1) 中的表示 ρ_{ω^i}.

(2) 令 $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. 我们要将 $\mathbb{C}G$ 分解为不可约 $\mathbb{C}G$-子模的直和形式. 令 $\omega = e^{2\pi i/3}$, 并定义

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 + a + a^2, & w_0 &= bv_0 \quad (= b + ba + ba^2), \\ v_1 &= 1 + \omega^2 a + \omega a^2, & w_1 &= bv_1, \\ v_2 &= 1 + \omega a + \omega^2 a^2, & w_2 &= bv_2. \end{aligned}$$

与上面的 (1) 一样, $v_i a = \omega^i v_i$ 对$i = 0, 1, 2$, 并且 $sp(v_i)$ 与 $sp(w_i)$ 都是 $\mathbb{C}\langle a \rangle$-模. 其次有

$$\begin{aligned} v_0 b &= w_0, & w_0 b &= v_0, \\ v_1 b &= w_2, & w_1 b &= v_2, \\ v_2 b &= w_1, & w_2 b &= v_1. \end{aligned}$$

所以, $sp(v_0, w_0)$,$sp(v_1, w_2)$ 与 $sp(v_2, w_1)$ 都是 $\mathbb{C}\langle b \rangle$-模, 因此是 $\mathbb{C}G$ 的 $\mathbb{C}G$-子模. 根据例 5.5(2) 中的论证, $\mathbb{C}G$-子模 $U_3 = sp(v_1, w_2)$ 与 $U_4 = sp(v_2, w_1)$ 是不可约的. 而 $sp(v_0, w_0)$ 是可约的, 因为 $U_1 = sp(v_0 + w_0)$ 与 $U_2 = sp(v_0 - w_0)$ 是它的 $\mathbb{C}G$-子模.

现在 $v_0, v_1, v_2, w_0, w_1, w_2$ 是 $\mathbb{C}G$ 的一组基, 因此

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4,$$

不可约 $\mathbb{C}G$-子模的直和. U_1 是平凡 $\mathbb{C}G$-模, U_1 与另一个 1 维 $\mathbb{C}G$-模 U_2 不同构. 但 $U_3 \cong U_4$(存在一个 $\mathbb{C}G$-同构: $v_1 \mapsto w_1, w_2 \mapsto v_2$).

由定理 10.5 可知, 有 3 个非同构的不可约 $\mathbb{C}G$-模, 也就是 U_1, U_2 与 U_3. 相应的, D_6 在 $\mathbb{C}$ 上的每个不可约表示都与下面其中之一等价:

$$\rho_1 : a \mapsto (1), b \mapsto (1);$$

$$\rho_2 : a \mapsto (1), b \mapsto (-1);$$

$$\rho_3 : a \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

第 10 章小结

1. 每个不可约 $\mathbb{C}G$-模都是正则 $\mathbb{C}G$-模的一个合成因子.
2. 非同构的不可约 $\mathbb{C}G$-模只有有限个.

第 10 章习题

1. G 为一个有限群, 找 $\mathbb{C}G$ 的一个 $\mathbb{C}G$-子模同构于平凡 $\mathbb{C}G$-模. 只有一个这样的 $\mathbb{C}G$-子模吗?

2. 令 $G=C_4$, 将 $\mathbb{C}G$ 写成不可约 $\mathbb{C}G$-子模直和的形式. (提示: 仿照例 10.8(1) 的方法.)

3. 令 $G=D_8=\langle a,b:a^4=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$. 找 $\mathbb{C}G$ 的一个一维的 $\mathbb{C}G$-子模, 假设为 $sp(u_1)$, 使得

$$u_1a=u_1,\quad u_1b=-u_1.$$

并找一维的 $\mathbb{C}G$-子模 $sp(u_2)$ 和 $sp(u_3)$, 使得

$$u_2a=-u_2,\quad u_2b=u_2,$$
$$u_3a=-u_3,\quad u_3b=-u_3.$$

4. 利用例 10.8(2) 中的方法找出 D_8 在 $\mathbb{C}$ 上的所有不可约表示.

5. 假设 V 是一个非零 $\mathbb{C}G$-模, 且有 $V=U_1\oplus U_2$, 其中 U_1 与 U_2 是同构的 $\mathbb{C}G$-模. 说明存在 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模 U, 与 U_1,U_2 均不相等, 但与它们同构.

6. 令 $G=Q_8=\langle a,b:a^4=1,a^2=b^2,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle,V$ 为例 4.5(2) 给出的 $\mathbb{C}G$-模. 那么 V 的一组基为 v_1,v_2, 并有

$$v_1a=iv_1,\quad v_1b=v_2,$$
$$v_2a=-iv_2,\quad v_2b=-v_1.$$

说明 V 是不可约的, 并找到同构于 V 的 $\mathbb{C}G$ 的 $\mathbb{C}G$-子模.

第 11 章　群代数的进一步研究

现在进一步地研究一个有限群 G 的群代数 $\mathbb{C}G$ 的结构. 像在第 10 章讨论的一样, 记

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r,$$

不可约 $\mathbb{C}G$-模 U_i 的一个直和. 在定理 10.5 中已经证明了每个不可约的 $\mathbb{C}G$-模 U 是同构于其中一个 U_i 的. 这时问题就出来了, 有多少个 U_i 是同构于 U 的? 有一个既漂亮又重要的答案: 有 $\dim U$ 个 (见定理 11.9).

定理 11.9 的证明是基于一个 $\mathbb{C}G$-模到另一个 $\mathbb{C}G$-模的 $\mathbb{C}G$-同态组成的向量空间的研究.

$\mathbb{C}G$-同态组成的空间

11.1　定义

令 V 和 W 是 $\mathbb{C}G$-模. 我们把所有的从 V 到 W 的 $\mathbb{C}G$-同态组成的集合记做

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W).$$

对于 $\vartheta, \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W), \lambda \in \mathbb{C}, v \in V$, 如下定义 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ 上的加法 $\vartheta + \phi$ 和数乘 $\lambda\vartheta$:

$$v(\vartheta + \phi) = v\vartheta + v\phi,$$

$$v(\lambda\vartheta) = \lambda(v\vartheta).$$

那么 $\vartheta + \phi, \lambda\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$. 有了这些定义, 很容易验证 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个向量空间.

以 Schur 引理的一个简单结果开始我们关于向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ 的研究.

11.2　命题

假设 V 和 W 是不可约的 $\mathbb{C}G$-模. 那么

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \begin{cases} 1, & V \cong W, \\ 0, & V \ncong W. \end{cases}$$

证明　如果 $V \ncong W$, 那么由 Schur 引理 9.1(1) 直接得到结论.

现在假设 $V \cong W$, 令 $\vartheta : V \to W$ 是一个 $\mathbb{C}G$-同构. 如果 $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$, 那么 $\phi\vartheta^{-1}$ 是一个从 V 到 V 的 $\mathbb{C}G$-同构. 所以由 Schur 引理 9.1(2), 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得

$$\phi\vartheta^{-1} = \lambda 1_V.$$

那么 $\phi = \lambda\vartheta$, 所以 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \{\lambda\vartheta : \lambda \in \mathbb{C}\}$, 一个一维空间. 证毕.

关于下一个结果, 回忆 10.4 的一个 $\mathbb{C}G$-模的一个合成因子.

11.3　命题

假设 V 和 W 是 $\mathbb{C}G$-模, 并且 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) \neq \{0\}$. 那么 V 和 W 有一个共同的合成因子.

证明　令 ϑ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ 中的一个非零元素. 那么由 Maschke 定理得到存在非零的 $\mathbb{C}G$-模 U 使得 $V = \mathrm{Ker}\vartheta \oplus U$. 令 X 是 U 的一个不可约 $\mathbb{C}G$-子模. 因为 $X\vartheta \neq \{0\}$, 由 Schur 引理 9.1(1) 得到 $X\vartheta \cong X$. 因此 X 是 V 和 W 的一个共同合成因子. 证毕.

下面的一些结果表明了一般地如何计算 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ 的维数. 关键的一步是下面的这个命题.

11.4　命题

假设 V, V_1, V_2 和 W, W_1, W_2 是 $\mathbb{C}G$-模, 那么

(1) $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1)) + \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2))$,

(2) $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1, W)) + \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_2, W))$.

证明　(1) 对于所有的 $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$, 如下定义函数 $\pi_1 : W_1 \oplus W_2 \to W_1$ 和 $\pi_2 : W_1 \oplus W_2 \to W_2$:

$$(w_1 + w_2)\pi_1 = w_1, \quad (w_1 + w_2)\pi_2 = w_2.$$

由命题 7.11 得知 π_1, π_2 是 $\mathbb{C}G$-同态. 如果 $\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$, 那么 $\vartheta\pi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1), \vartheta\pi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$(见习题 7.1).

现在如下定义从 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$ 的 (外) 直和的一个函数 f:

$$f : \vartheta \mapsto (\vartheta\pi_1, \vartheta\pi_2) \quad (\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)).$$

显然有 f 是一个线性变换. 现在说明 f 是可逆的.

给定 $\phi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_i)(i=1,2)$, 函数

$$\phi : v \mapsto v\phi_1 + v\phi_2 \quad (v \in V)$$

属于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$, 并且 ϕ 在 f 下的像是 (ϕ_1, ϕ_2). 因此 f 是满射.

如果 $\vartheta \in \mathrm{Ker}f$, 那么对于所有的 $v \in V$ 有 $v\vartheta\pi_1 = 0, v\vartheta\pi_2 = 0$, 所以 $v\vartheta = v\vartheta(\pi_1 + \pi_2) = 0$. 因此 $\vartheta = 0$. 所以 $\mathrm{Ker}f = \{0\}$, f 是单射.

我们已经建立了从 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$ 的一个可逆的线性变换. 因此, 这两个空间有相同的维数, (1) 成立.

(2) 对于 $\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)$, 定义 $\vartheta_{V_i} : V_i \to W \quad (i=1,2)$ 是 ϑ 在 V_i 上的限制, 也就是说, ϑ_{V_i} 是函数

$$v_i\vartheta_{V_i} = v_i\vartheta \quad (v_i \in V_i).$$

那么对于 $i=1,2$ 来说, $\vartheta_{V_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W)$.

现在令 h 是从 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_2, W)$ 的一个函数, 由如下式子给出:

$$h : \vartheta \mapsto (\vartheta_{V_1}, \vartheta_{V_2}) \quad (\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)).$$

显然有 h 是一个单的线性变换. 给定 $\phi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W)(i=1,2)$, 函数

$$\phi : v_1 + v_2 \mapsto v_1\phi_1 + v_2\phi_2 \quad (v_i \in V_i, i=1,2)$$

在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)$ 中, 并且它在 h 下的像是 (ϕ_1, ϕ_2). 因此 h 是满射. 这样就证明了 h 是一个可逆的线性变换, (2) 成立. 证毕.

现在假设有 $\mathbb{C}G$-模 $V, W, V_i, W_j (1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s)$. 那么对命题 11.4 进行归纳可得到

(11.5) (1) $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus \ldots \oplus W_s)) = \sum_{j=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_j))$,

(2) $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_r, W)) = \sum_{i=1}^{r} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W))$.

由这两个式子我们得到

(3) $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_r, W_1 \oplus \ldots \oplus W_s)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j))$.

由 (3) 和命题 11.2 可知当所有的 V_i 和 W_j 是不可约的时候, 一般可以得到 $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W))$. 在下面的推论中, 把其中一个 $\mathbb{C}G$-模是不可约的这种情况拿出来单独讨论.

11.6 推论

假设 V 是 $\mathbb{C}G$-模, 并且有

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s,$$

其中每个 U_i 是不可约的 $\mathbb{C}G$-模. 令 W 是任意的不可约的 $\mathbb{C}G$-模. 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V)$ 的维数相等并且都等于使得 $U_i \cong W$ 成立的那些 U_i 的个数.

证明　由 (11.5),

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \sum_{i=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_i, W)),$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V)) = \sum_{i=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, U_i)).$$

再由命题 11.2,

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_i, W)) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, U_i)) = \begin{cases} 1, & U_i \cong W, \\ 0, & U_i \ncong W. \end{cases}$$

证毕.

11.7 例子

对于 $G = D_6$, 在例 10.8(2) 中已经看到了

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4,$$

不可约的 $\mathbb{C}G$-子模的一个直和, 并且有 $U_3 \cong U_4$, 但是 U_3 并不同构于 U_1 或 U_2. 因此由推论 11.6, 有

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U_3)) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_3, \mathbb{C}G)) = 2.$$

关于找这两个由 $\mathbb{C}G$-同态组成的向量空间的基的问题, 我们留作习题 (见习题 11.5).

下面的命题研究了由从正则 $\mathbb{C}G$-模到任意其他的 $\mathbb{C}G$-子模之间的 $\mathbb{C}G$-同态组成的空间. 当这个结论与推论 11.6 结合时, 将会给出这章最主要的结论.

11.8 命题

如果 U 是一个 $\mathbb{C}G$-模, 那么

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)) = \dim U.$$

证明　令 $d = \dim U$. 选择 U 的一组基 $u_1, \ldots, u_d$. 对于 $1 \leqslant i \leqslant d$ 来说, 如下定义 $\phi_i : \mathbb{C}G \to U$

$$r\phi_i = u_i r \quad (r \in \mathbb{C}G).$$

那么 $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$, 这是因为对于所有的 $r, s \in \mathbb{C}G$,

$$(rs)\phi_i = u_i(rs) = (u_i r)s = (r\phi_i)s.$$

下面证明 $\phi_1, \ldots, \phi_d$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ 的一组基.

假设 $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$. 那么存在 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ 使得

$$1\phi = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_d u_d.$$

因为 ϕ 是一个 $\mathbb{C}G$-同态, 对于所有的 $r \in \mathbb{C}G$, 有

$$\begin{aligned} r\phi &= (1r)\phi = (1\phi)r \\ &= \lambda_1 u_1 r + \ldots + \lambda_d u_d r \\ &= r(\lambda_1 \phi_1 + \ldots + \lambda_d \phi_d). \end{aligned}$$

因此 $\phi = \lambda_1\phi_1 + \ldots + \lambda_d\phi_d$. 所以 $\phi_1, \ldots, \phi_d$ 张成 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$.

现在假设

$$\lambda_1\phi_1 + \ldots + \lambda_d\phi_d = 0 \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}).$$

两边同时作用在单位元 1 上, 有

$$\begin{aligned} 0 &= 1(\lambda_1\phi_1 + \ldots + \lambda_d\phi_d) \\ &= \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_d u_d, \end{aligned}$$

所以对于所有的 i 有 $\lambda_i = 0$. 因此 $\phi_1, \ldots, \phi_d$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ 的一组基, 所以 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ 的维数是 d. 证毕.

现在看这一章的最主要的定理, 这个定理告诉我们在正则 $\mathbb{C}G$-模中每个不可约 $\mathbb{C}G$-模出现的次数.

11.9　定理

假设

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus, \ldots, \oplus U_r,$$

不可约的 $\mathbb{C}G$-子模的一个直和. 如果 U 是任意的不可约的 $\mathbb{C}G$-模, 那么使得 $U_i \cong U$ 成立的 $\mathbb{C}G$-模 U_i 的数量等于 $\dim U$.

证明　由命题 11.8,

$$\dim U = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)),$$

再由推论 11.6, 这与使得 $U_i \cong U$ 成立的 $\mathbb{C}G$-模 U_i 的数量相等. 证毕.

11.10　例子

再次回忆在例 10.8(2) 中, 如果 $G = D_6$, 那么 $\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$, 其中 U_1, U_2 是不同构的一维的 $\mathbb{C}G$-模, U_3, U_4 是同构的不可约的二维 $\mathbb{C}G$-模. 这解释了定理 11.9:

$$\begin{aligned} &U_1\text{出现了一次}, \quad \dim U_1 = 1; \\ &U_2\text{出现了一次}, \quad \dim U_2 = 1; \\ &U_3\text{出现了两次}, \quad \dim U_3 = 2. \end{aligned}$$

我们用定理 11.9 的一个重要的结论来结束本章的学习, 这个结论有关于所有不可约的 $\mathbb{C}G$-模的维数.

11.11　定义

给定了不可约的 $\mathbb{C}G$-模 $V_1, \ldots, V_k$, 如果每个不可约的 $\mathbb{C}G$-模同构于某个 V_i, 并且 $V_1, \ldots, V_k$ 两两不同构, 那么就说不可约的 $\mathbb{C}G$-模 $V_1, \ldots, V_k$ 构成了非同构的不可约的 $\mathbb{C}G$-模的一个完全集 (由推论 10.7, 对于任意有限群 G, 存在非同构的不可约的 $\mathbb{C}G$-模的一个完全集).

11.12　定理

令 $V_1, \ldots, V_k$ 构成了非同构的不可约的 $\mathbb{C}G$-模的一个完全集. 那么

$$\sum_{i=1}^{k} (\dim V_i)^2 = |G|.$$

证明　令 $\mathbb{C}G = U_1 \oplus, \ldots, \oplus U_r$, 不可约的 $\mathbb{C}G$-子模的一个直和. 对于 $1 \leqslant i \leqslant k$ 来说, 记 $d_i = \dim V_i$. 由定理 11.9, 对于每个 i 来说, 使得 $U_j \cong V_i$ 的 $\mathbb{C}G$-模 U_j 的数量等于 d_i. 因此,

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{C}G) &= \dim U_1 + \ldots + \dim U_r \\ &= \sum_{i=1}^{k} d_i(\dim V_i) = \sum_{i=1}^{k} d_i^2. \end{aligned}$$

因为 $\dim\mathbb{C}G = |G|$, 所以结果成立. 证毕.

11.13　例子

令 G 是一个 8 阶群, 令 $d_1,\ldots,d_k$ 表示所有的不可约的 $\mathbb{C}G$-模的维数. 由定理 11.12 有

$$\sum_{i=1}^{k} d_i^2 = 8.$$

注意到平凡 $\mathbb{C}G$-模是维数为 1 的不可约的 $\mathbb{C}G$-模, 所以对某些 i 有 $d_i = 1$. 因此 $d_1,\ldots,d_k$ 的所有可能的情况有

$$1,1,1,1,1,1,1,1 \text{ 和 } 1,1,1,1,2.$$

这两种都可能发生：第一种在 G 是一个交换群时发生 (见命题 9.5). 第二种在 $G = D_8$ 是发生 (见习题 10.4).

后面的章节中将会看到对于所有的 i, $\dim V_i$ 整除 $|G|$, 这个结果与定理 11.12 相结合, 在计算不可约的 $\mathbb{C}G$-模的维数时将会是一个很有用的工具.

第 11 章总结

1. $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_r, W_1 \oplus \ldots \oplus W_s)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j))$

2. $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)) = \dim U$.

3. 令 $\mathbb{C}G = U_1\oplus,\ldots,\oplus U_r$, 不可约的 $\mathbb{C}G$-模的一个直和. 如果 U 是任意的不可约的 $\mathbb{C}G$-模, 那么使得 $U_i \cong U$ 的 $\mathbb{C}G$-模 U_i 的数量等于 $\dim U$.

4. 令 $V_1,\ldots,V_k$ 构成了非同构的不可约的 $\mathbb{C}G$-模的一个完全集. 那么

$$\sum_{i=1}^{k} (\dim V_i)^2 = |G|.$$

第 11 章习题

1. 令 G 是一个 6 阶非交换群, 计算所有的不可约的 $\mathbb{C}G$-模的维数.

2. 令 G 是一个 12 阶群, G 的所有的不可约的表示的可能的次数是多少?
计算 D_{12} 的不可约表示的次数 (提示：参见习题 5.3).

3. 令 G 是一个有限群. 找到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)$ 的一组基.

4. 假设 $G = S_n$, V 是 G 在 $\mathbb{C}$ 上的 n 维置换模, 就像 4.10 中说的那样. 如果 U 是平凡 $\mathbb{C}G$-模, 证明 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, U)$ 的维数是 1.

5. 令 $G = D_6$, 并且有 $\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$, 不可约的 $\mathbb{C}G$-模的一个直和, 就像例 10.8(2) 中说的那样. 找到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U_3)$ 的一组基和 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_3, \mathbb{C}G)$ 的一组基.

6. 令 $V_1, \ldots, V_k$ 构成了非同构的不可约的 $\mathbb{C}G$-模的一个完全集, 令 V, W 是任意的 $\mathbb{C}G$-模. 假设对于 $1 \leqslant i \leqslant k$,

$$d_i = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, V_i)), \quad e_i = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V_i)).$$

证明 $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \sum_{i=1}^{k} d_i e_i$.

第12章 共 轭 类

在本章中我们将暂时中断对群表示的讨论转而讨论一些群论的知识, 这些知识将会在接下来的各个章节中起重要作用. 首先给出共轭类的定义, 进而决定二面体群、对称群和交错群的共轭类, 在本章的最后将证明一个群的共轭类与其群代数的结构的重要联系.

本章中均假定 G 是有限群.

共 轭 类

12.1 定义

假设 $x, y \in G$, 若存在 $g \in G$ 有 $y = g^{-1}xg$, 则称 x 与 y 共轭. 群 G 中所有与 x 共轭的元素组成的集合记为

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\},$$

并称该集合为 x 在 G 中的共轭类.

首先将证明两个互不相同的共轭类不存在公共元素.

12.2 命题

假设 $x, y \in G$, 则要么 $x^G = y^G$, 要么 $x^G \cap y^G$ 是空集.

证明 假设 $x^G \cap y^G$ 非空, 选择 $z \in x^G \cap y^G$. 则存在 $g, h \in G$ 使得

$$z = g^{-1}xg = h^{-1}yh.$$

从而可知 $x = gh^{-1}yhg^{-1} = k^{-1}yk$, 其中 $k = hg^{-1}$. 因此

$$\begin{aligned} a \in x^G \quad &\Rightarrow \quad a = b^{-1}xb \quad \text{存在某个} b \in G \\ &\Rightarrow \quad a = b^{-1}k^{-1}ykb \\ &\Rightarrow \quad a = c^{-1}yc \quad \text{其中} c = kb \\ &\Rightarrow \quad a \in y^G. \end{aligned}$$

从而 $x^G \subseteq y^G$, 同样可以证明 $x^G \supseteq y^G$, 因此 $x^G = y^G$. 证毕.

因为 G 的每个元素 $x \in x^G$, 所以 G 是共轭类的并, 所以我们得到:

12.3 推论

每一个群都是一族共轭类的并, 并且互不相同的共轭类不相交.

注意: 也可以从等价关系的角度考虑推论 12.3: 共轭关系是一个等价关系, 因此共轭类也是等价类.

12.4 定义

假设 $G = x_1^G \cup \ldots \cup x_l^G$, 其中 $x_1^G, \ldots, x_l^G$ 为互不相同的共轭类, 则称 $x_1, \ldots, x_l$ 为群 G 的共轭类代表元.

12.5 例子

(1) 对于任意的群 G,$1^G = \{1\}$ 为群 G 的一个共轭类.

(2) 假设群 G=D_6=$\langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. 则群 G 中的元素为 $1, a, a^2, b, ab, a^2b$. 由于对于任意的 $g \in G$ 有 $g^{-1}ag$ 等于 a 或者 a^2, 且 $b^{-1}ab = a^2$, 从而

$$a^G = \{a, a^2\}.$$

同样地, 对于任意的整数 i, 有 $a^{-i}ba^i = a^{-2i}b$, 从而

$$b^G = \{b, ab, a^2b\}.$$

因此群 G 的共轭类为

$$\{1\}, \{a, a^2\}, \{b, ab, a^2b\}.$$

(3) 若群 G 为一个交换群, 则对于任意的 $x, g \in G$ 有 $g^{-1}xg = x$, 从而 $x^G = \{x\}$. 即群 G 的每一个共轭类均只包含一个元素.

下面的命题在计算群的共轭类时是十分有用的.

12.6 命题

假设 $x, y \in G$. 若在群 G 中 x 与 y 共轭, 则对于任意的整数 n 有 x^n 与 y^n 共轭, 且 x 与 y 具有相同的阶数.

证明 显然对于任意的 $a, b \in G$, 有

$$g^{-1}abg = (g^{-1}ag)(g^{-1}bg).$$

从而可知 $g^{-1}x^ng = (g^{-1}xg)^n$. 假设在群 G 中 x 与 y 共轭, 则存在 $g \in G$ 使得 $y = g^{-1}xg$. 因此 $y^n = g^{-1}x^ng$, 从而 x^n 与 y^n 共轭. 假设 x 的阶数为 m, 则 $y^m = g^{-1}x^mg = 1$, 且对于任意的 $0 < r < m$, $y^r = g^{-1}x^rg \neq 1$, 从而 y 的阶数也是 m. 证毕.

共轭类的大小

下面的定理将群 G 的一个共轭类中的元素个数与它的一个子群联系起来, 首先给出该子群的定义.

12.7　定义

设 $x \in G$. 则 x 在群 G 上的中心化子, 记为 $C_G(x)$, 为 G 中所有可以与 x 交换的元素组成的集合; 即

$$C_G(x) = \{g \in G : xg = gx\}.$$

同样地有 $C_G(x) = \{g \in G : g^{-1}xg = x\}$.

通过验证易知 $C_G(x)$ 为群 G 的一个子群 (见习题 12.1). 由定义可知 $x \in C_G(x)$ 并且对于所有的 $x \in G$ 有 $\langle x \rangle \subseteq C_G(x)$.

12.8　定理

假设 $x \in G$. 则共轭类 x^G 的大小为

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)|.$$

特别地, $|x^G|$ 整除 $|G|$.

证明　首先对于任意的 $g, h \in G$, 有

$$\begin{aligned} g^{-1}xg = h^{-1}xh \quad &\Leftrightarrow \quad hg^{-1}x = xhg^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad hg^{-1} \in C_G(x) \\ &\Leftrightarrow \quad C_G(x)g = C_G(x)h. \end{aligned}$$

由此, 可以定义从 x^G 到 $C_G(x)$ 在 G 中的右陪集组成的集合的一个单射 f, 即

$$f : g^{-1}xg \mapsto C_G(x)g \quad (g \in G).$$

显然 f 也是一个满射. 从而可知 f 是一个双射, 从而可知 $|x^G| = |G : C_G(x)|$. 证毕.

根据上面的定理可以得到

(12.9)　　$|x^G| = 1 \Leftrightarrow g^{-1}xg = x$, 对于所有的$g \in G \Leftrightarrow x \in Z(G)$,

其中 $Z(G)$ 为群 G 的中心, 如定义 9.15.

综上所述, 我们得到:

12.10 共轭类方程

假设 $x_1, \ldots, x_l$ 是群 G 的共轭类代表元. 则

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|,$$

其中 $|x_i^G| = |G : C_G(x_i)|$, 并且 $|x_i^G|$ 与 $|Z(G)|$ 均整除 $|G|$.

二面体群的共轭类

在本节中将运用定理 12.8 来寻找所有二面体群的共轭类.

假设 $G = D_{2n}$, 为阶数为 $2n$ 的二面体群, 则

$$G = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

在寻找群 G 的共轭类时, 为了方便起见, 将 n 分为偶数与奇数进行考虑.

(1) n 为奇数时

首先考虑 $a^i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$. 由于 $C_G(a^i)$ 包含 $\langle a \rangle$, 则

$$|G : C_G(a^i)| \leqslant |G : \langle a \rangle| = 2.$$

并且 $b^{-1}a^ib = a^{-i}$, 因此 $\{a^i, a^{-i}\} \subseteq (a^i)^G$. 由于 n 为奇数, 所以 $a^i \neq a^{-i}$, 因此 $|(a^i)^G| \geqslant 2$. 运用定理 12.8 可知

$$2 \geqslant |G : C_G(a^i)| = |(a^i)^G| \geqslant 2.$$

因此等式成立, 并且

$$C_G(a^i) = \langle a \rangle, \quad (a^i)^G = \{a^i, a^{-i}\}.$$

另一方面, $C_G(b)$ 包含 $\{1, b\}$; $b^{-1}a^ib = a^{-i}$, 且 a^i 与 $a^ib (1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 中没有任何元素与 b 可交换, 因此

$$C_G(b) = \{1, b\}.$$

因此根据定理 12.8 可知 $|b^G| = n$. 由于形如 a^i 的 n 个元素均被考虑完, 所以 b^G 中包含 G 中剩余的 n 个元素, 即

$$b^G = \{b, ab, \ldots, a^{n-1}b\}.$$

因此我们证明了:

(12.11)　二面体群 D_{2n}(n 为奇数) 共有 $\frac{1}{2}(n+3)$ 个共轭类, 它们是

$$\{1\},\{a,a^{-1}\},\ldots,\{a^{\frac{n-1}{2}},a^{-\frac{n-1}{2}}\},\{b,ab,\ldots,a^{n-1}b\}.$$

(2) n 为偶数时

记 $n=2m$. 由于 $b^{-1}a^mb=a^{-m}=a^m$, 则 a^m 在 G 中的中心化子包含 a 与 b, 因此 $C_G(a^m)=G$. 所以 a^m 在 G 中的共轭类为 $\{a^m\}$. 类似 (1), $(a^i)^G=\{a^i,a^{-i}\}$ 对于所有的 $(1\leqslant i\leqslant m-1)$.

对于每一个整数 j,

$$a^jba^{-j}=a^{2j}b,\quad a^j(ab)a^{-j}=a^{2j+1}b.$$

从而可知

$$b^G=\{a^{2j}b:0\leqslant j\leqslant m-1\},\quad (ab)^G=\{a^{2j+1}b:0\leqslant j\leqslant m-1\}.$$

因此我们证明了:

(12.12)　二面体群 D_{2n}(n 为偶数, 且 $n=2m$) 共有 $m+3$ 个共轭类:

$$\{1\},\{a^m\},\{a,a^{-1}\},\ldots,\{a^{m-1},a^{-m+1}\},$$

$$\{a^{2j}b:0\leqslant j\leqslant m-1\},\{a^{2j+1}b:0\leqslant j\leqslant m-1\}.$$

S_n 的共轭类

在给出对称群S_n 的共轭类之前, 我们先证明一个虽然简单但是却很重要的命题.

12.13　命题

假设 x 为群 S_n中的 k-轮换型 $(i_1i_2\ldots i_k)$, 且 $g\in S_n$. 则 $g^{-1}xg$ 为 k-轮换型 $(i_1g\ i_2g\ \ldots\ i_kg)$.

证明　令 $A=\{i_1,\ldots,i_k\}$. 对于 $i_r\in A$,

$$i_rg(g^{-1}xg)=i_rxg=i_{r+1}g\quad (\text{或者当}r=k\text{时为}i_1g).$$

并且, 当 $1\leqslant i\leqslant n, i\notin A$ 时,

$$ig(g^{-1}xg)=ixg=ig.$$

因此 $g^{-1}(i_1i_2\ldots i_k)g=(i_1g\ i_2g\ \ldots\ i_kg)$, 命题得证. 证毕.

现在考虑任意一个置换 $x \in S_n$. 记

$$x = (a_1 \dots a_{k_1})(b_1 \dots b_{k_2})(c_1 \dots c_{k_s}),$$

为一些互不相交的轮换型的乘积, 其中 $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_s$. 根据命题 12.13, 若 $g \in S_n$, 则

(12.14)

$$\begin{aligned} g^{-1}xg &= g^{-1}(a_1 \dots a_{k_1})gg^{-1}(b_1 \dots b_{k_2})g \dots g^{-1}(c_1 \dots c_{k_s})g \\ &= (a_1 g \dots a_{k_1} g)(b_1 g \dots b_{k_2} g)(c_1 g \dots c_{k_s} g). \end{aligned}$$

我们称 $(k_1, \dots, k_s)$ 为 x 的轮换型, 则可知 x 与 $g^{-1}xg$ 具有相同的轮换型. 另一方面, 给定两个具有相同的型的置换 x 与 y, 其中

$$x = (a_1 \dots a_{k_1}) \dots (c_1 \dots c_{k_s}),$$

$$y = (a'_1 \dots a'_{k_1}) \dots (c'_1 \dots c'_{k_s}),$$

则存在一个 $g \in S_n$ 使得 $a_1 \mapsto a'_1, \dots, c_k \mapsto c'_k$, 从而根据 (12.14),

$$g^{-1}xg = y.$$

从而证明了下面的结果.

12.15　定理

对于 $x \in S_n$, x 在 S_n 中的共轭类 x^{S_n} 由 S_n 中所有与 x 具有相同的转换型的置换组成.

12.16　例子

(1) S_3 的共轭类为

等价类	转换型
$\{1\}$	(1)
$\{(12), (13), (23)\}$	(2)
$\{(123), (132)\}$	(3)

(2) S_4中的 (12)(34) 所代表的共轭类为所有的型为 (2, 2) 的元素组成, 它们是

$$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

(3) 在 S_4 中共有五个共轭类, 它们的代表元分别为

$$1,(12),(123),(12)(34),(1234).$$

为了计算共轭类的大小, 我们只需计算所有的 2-轮换型, 3-轮换型等. 在 S_4 中的 2-轮换型的个数等于从 $\{1,2,3,4\}$ 选出的二元数对的个数, 即为 $C_4^2=6$. 同样的可以得到 S_4 中的 3-轮换型的个数等于 4×2(不动点有 4 种选择, 对一个给定的不动点, 有 2 个 3-轮换). 进而可知由三个型为 $(2,2)$ 的置换和 6 个型为 (1234) 的置换. 从而, 对于 $G=S_4$, 它的共轭类代表元 g, 共轭类的大小 $|g^G|$ 以及中心化子 $|C_G(g)|$ 的阶数 (运用定理 12.8 可得) 等信息如下表:

代表元	g	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
共轭类大小	$\|g^G\|$	1	6	8	3	6
	$\|C_G(g)\|$	24	4	3	8	4

最后根据 $|S_4|=1+6+8+3+6$ 可以验证上面给出的运算方法是正确的.

(4) 同样地, 对于 $G=S_5$ 也有类似结论.

代表元	g	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)	(123)(45)	(12345)
共轭类大小	$\|g^G\|$	1	10	20	15	30	20	24
	$\|C_G(g)\|$	120	12	6	8	4	6	5

群 A_n 的共轭类

给定一个偶置换 $x\in A_n$, 则根据定理 12.15 可知, x 在 S_n 中的共轭类 x^{S_n} 是由所有与 x 具有相同的型的元素组成. 由于 x 在 A_n 中的共轭类 x^{A_n} 为

$$x^{A_n}=\{g^{-1}xg:g\in A_n\},$$

故它必然包含在 x^{S_n} 中; 然而, 在一般情况下, x^{A_n} 却不一定等于 x^{S_n}. 例如, 假设 $n=3$, 取 $x=(123)$, 则 $x^{A_3}=\{x\}$, 而 $x^{S_3}=\{x,x^{-1}\}$.

下面的结论告诉我们在什么情况下 x^{A_n} 与 x^{S_n} 是相等的, 在什么情况下等式又是不成立的.

12.17　命题

假设 $x\in A_n$ 且 $n>1$.

(1) 若 x 与 S_n 中的某个奇置换可交换, 则 $x^{S_n}=x^{A_n}$.

(2) 若 x 与 S_n 中的任何奇置换均不可交换, 则 x^{S_n} 在 A_n 中分裂成两个大小相同的共轭类, 这两个共轭类的代表元分别为 x 与 $(12)^{-1}x(12)$.

证明　(1) 假设 x 与某个奇置换 g 可交换. 令 $y \in x^{S_n}$, 满足 $y = h^{-1}xh$. 当 h 是一个偶置换时 $y \in x^{A_n}$; 当 h 是一个奇置换时 $gh \in A_n$, 且

$$y = h^{-1}xh = h^{-1}g^{-1}xgh = (gh)^{-1}x(gh),$$

因此同样地有 $y \in x^{A_n}$. 从而有 $x^{S_n} \subseteq x^{A_n}$, 因此 $x^{S_n} = x^{A_n}$.

(2) 假设 x 与 S_n 中的任何奇置换均不可交换. 则

$$C_{S_n}(x) = C_{A_n}(x).$$

从而根据定理 12.8,

$$|x^{A_n}| = |A_n : C_{A_n}(x)| = \frac{1}{2}|S_n : C_{A_n}(x)| = \frac{1}{2}|S_n : C_{S_n}(x)| = \frac{1}{2}|x^{S_n}|.$$

再者, 由于

$$\{h^{-1}xh : h\text{为奇置换}\} = ((12)^{-1}x(12))^{A_n},$$

且每一个奇置换均可表示为 $(12)a$(其中 $a \in A_n$). 从而有

$$x^{S_n} = \{h^{-1}xh : h\text{为偶置换}\} \cup \{h^{-1}xh : h\text{为奇置换}\} = x^{A_n} \cup ((12)^{-1}x(12))^{A_n},$$

最后由于 $|x^{A_n}| = \frac{1}{2}|x^{S_n}|$, 从而共轭类 x^{A_n} 与 $((12)^{-1}x(12))^{A_n}$ 必然阶数相同且互不相交. 证毕.

12.18　例子

(1) 现在寻找 A_4的所有共轭类. A_4 中的元素为单位元, 以及所有型为 $(2,2)$与(3)的元素. 由于 $(12)(34)$ 与奇置换 (12) 可交换, 从而根据命题 12.17 可知

$$(12)(34)^{A_4} = (12)(34)^{S_4} = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

然而由于 (123) 与任何的奇置换均不可交换: 如果 $g^{-1}(123)g = (123)$, 那么根据命题 12.13, $(123) = (1g\ 2g\ 3g)$, 所以 g 为 1,(123) 或 (132), 为一个偶置换. 因此根据定理 12.17 可知, $(123)^{S_4}$ 在 A_4 中分裂成两个大小均为 4 的共轭类, 它们的共轭类代表元分别为 (123) 与 $(12)^{-1}(123)(12) = (132)$. 因此 A_4 的共轭类为

代表元	1	(12)(34)	(123)	(132)
共轭类大小	1	3	4	4
中心化子的阶数	12	4	3	3

(2) 现在寻找 A_5的所有共轭类. S_5 中非单位的元素包括 S_5 中所有型为 (3), (2,2), (5) 的元素. 由于元素 (123) 与 (23)(45) 均可与奇置换 (45) 交换; 而 (12345) 与任意的奇置换均不可交换. 则利用命题 12.17 可知 A_5 的共轭类代表元分别为 1, (123), (12)(34), (12345),$(12)^{-1}(12345)(12)$=(13452). 根据命题 12.17(2), 可知共轭类大小与中心化子阶数如下表:

代表元	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
共轭类大小	1	20	15	12	12
中心化子的阶数	60	3	4	5	5

正 规 子 群

下面的基本结果给出了正规子群与共轭类的关系.

12.19 命题

假设 H 为群 G 的一个子群. 则它是 G 的一个正规子群当且仅当它是群 G 的某些共轭类的并.

证明 若 H 是某些共轭类的并, 则

$$h \in H, g \in G \Rightarrow g^{-1}hg \in H,$$

因此 $g^{-1}Hg \subseteq H$. 从而 $H \lhd G$.

若 $H \lhd G$, 则对于所有的 $h \in H, g \in G$ 都有 $g^{-1}hg \in H$, 从而 $h^G \subseteq H$. 因此 $H = \bigcup_{h \in H} h^G$, 即 H 是群 G 的某些共轭类的并. 证毕.

12.20 例子

现在根据上面的结论找出 S_4的所有正规子群. 假设 $H \lhd S_4$. 则根据命题 12.19, H 为 S_4 的某些共轭类的并. 根据例 12.16(3), 这些共轭类的大小分别为 $1, 6, 8, 3, 6$. 根据拉格朗日定理, $|H|$ 整除 24 且 $1 \in H$, 则群 H 的阶数只可能是下面四种情况:

$$|H| = 1, 1+3, 1+8+3, 1+6+8+3+6.$$

在第一种情况下 $H = \{1\}$, 在最后一种情况下 $H = S_4$, 并且在第三种情况下 $H = A_4$. 当 $|H| = 1+3$ 时, 有

$$H = 1^{S_4} \cup (12)(34)^{S_4} = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

容易验证它是 S_4 的一个子群, 将它记为 V_4(其中 V 代表“Viergruppe”, 也就是“四元群”).

综上, 我们得到了 S_4 的四个正规子群:

$$\{1\}, S_4, A_4 与 V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

群代数的中心

在本章的最后一节我们将群代数 $\mathbb{C}G$ 的中心与群 G 的共轭类联系起来. 在定义 9.12 中将群代数的中心定义为

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zr = rz, 对于所有的 r \in \mathbb{C}G\}.$$

通过验证可得 $Z(\mathbb{C}G)$ 为向量空间 $\mathbb{C}G$ 的一个子空间, 在该子空间中存在比较简单的一组基, 可以通过共轭类来进行描述.

12.21 定义

假设 $C_1, \ldots, C_l$ 为群 G 的互不相同的共轭类. 对于 $1 \leqslant i \leqslant l$, 定义

$$\overline{C}_i = \sum_{g \in C_i} g \in \mathbb{C}G.$$

$\mathbb{C}G$ 的元素 $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_l$ 称为类和.

12.22 命题

类和 $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_l$ 形成了 $Z(\mathbb{C}G)$ 的一组基.

证明 首先证明每一个 $\overline{C}_i$ 均属于 $Z(\mathbb{C}G)$. 假设元素 g 所在的共轭类 C_i 中共包含 r 个互不相同的共轭元 $y_1^{-1}gy_1, \ldots, y_r^{-1}gy_r$, 则

$$\overline{C}_i = \sum_{j=1}^{r} y_j^{-1} g y_j.$$

对于任意的 $h \in G$,

$$h^{-1}\overline{C}_i h = \sum_{j=1}^{r} h^{-1} y_j^{-1} g y_j h.$$

当 j 从 1 取到 r 时, 元素 $h^{-1}y_j^{-1}gy_jh$ 取遍 C_i 中的所有元素, 由于

$$h^{-1}y_j^{-1}gy_jh = h^{-1}y_k^{-1}gy_kh \Leftrightarrow y_j^{-1}gy_j = y_k^{-1}gy_k.$$

因此

$$\sum_{j=1}^{r} h^{-1}y_j^{-1}gy_jh = \overline{C}_i,$$

即

$$h^{-1}\overline{C}_i h = \overline{C}_i.$$

从而可知每一个 $\overline{C}_i$ 均可与 G 中的任意一个元素可交换, 进而与 $\mathbb{C}G$ 中的所有元素可交换, 因此 $\overline{C}_i \in Z(\mathbb{C}G)$.

其次, 我们知道 $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_l$ 在 $Z(\mathbb{C}G)$ 上是线性无关的: 因为如果假设 $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \overline{C}_i = 0(\lambda_i \in \mathbb{C})$, 则由于 $C_1, \ldots, C_l$ 是互不相交的, 从而根据推论 12.3 可知对于所有的 i 有 $\lambda_i = 0$.

最后证明 $Z(\mathbb{C}G)$ 可以由 $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_l$ 所张成. 假设 $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in Z(\mathbb{C}G)$. 则对于 $h \in G$, 有 $rh = hr$, 即 $h^{-1}rh = r$. 从而可得

$$\sum_{g \in G} \lambda_g h^{-1} g h = \sum_{g \in G} \lambda_g g.$$

因此对于每一个 $h \in G$ 有 g 的系数 λ_g 等于 $h^{-1}gh$ 的系数 $\lambda_{h^{-1}gh}$. 即函数 $g \mapsto \lambda_g$ 在群 G 的共轭类上是一个常数. 从而 $r = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \overline{C}_i$, 其中 λ_i 为共轭类 C_i 中元素的系数 λ_{g_i}. 证毕.

12.23　例子

(1) 根据例 12.16(1) 可知, $Z(\mathbb{C}S_3)$ 的一组基为

$$1, (12) + (13) + (23), (123) + (132).$$

(2) 根据 (12.12) 可知,$Z(\mathbb{C}D_8)$ 的一组基为

$$1, a^2, a + a^3, b + a^2 b, ab + a^3 b.$$

第 12 章总结

1. 每一个群都是一些共轭类的并, 且不同的共轭类互不相交.

2. 对于群 G 中的每一个元素 x, 它的中心化子 $C_G(x)$ 由 G 中所有与 x 可交换的元素组成. 它是群 G 的一个子群, 且元素 x 所代表的共轭类 x^G 中的元素个数为 $|G : C_G(x)|$.

3. S_n中的共轭类对应着 S_n 中置换的轮换型.

4. 假设 $x \in A_n$, 则 $x^{S_n} = x^{A_n}$ 当且仅当 x 与 S_n 中的某些奇置换可交换.

5. 群代数 $\mathbb{C}G$ 的类和构成了 $Z(\mathbb{C}G)$ 的一组基.

第 12 章习题

1. 假设 G 是一个群且 $x \in G$, 证明 $C_G(x)$ 为 G 的一个包含 $Z(G)$ 的子群.

2. 假设 G 是一个有限群且 $g \in G, z \in Z(G)$. 证明共轭类 g^G 与 $(gz)^G$ 的大小相同.

3. 假设 $G = S_n$.

(a) 证明 $|(12)^G| = C_n^2$ 并确定群 $C_G((12))$. 从而验证该结果满足定理 12.8.

(b) 证明 $|(123)^G| = 2C_n^3, |(12)(34)^G| = 3C_n^4$.

(c) 令 $n = 6$. 证明

$$|(123)(456)^G| = 40\text{且}|(12)(34)(56)^G| = 15,$$

计算 S_6的其他共轭类的大小 (S_6 共有 11 个共轭类).

4. 假设 $x \in A_6$且 $x^{S_6} \neq x^{A_6}$, 试分析 x 的轮换型是怎样的.

5. 证明 A_5是一个单群 (提示: 运用例 12.20 中的方法).

6. 确定四元数群 Q_8的共轭类. 给出群代数 $\mathbb{C}Q_8$ 的中心 $Z(\mathbb{C}Q_8)$ 的一组基.

7. 令 p 为素数,n 为正整数. 假设群 G 的阶数为 p^n.

(a) 运用共轭类方程 12.10 证明 $Z(G) \neq \{1\}$.

(b) 假设 $n \geqslant 3$ 且 $|Z(G)| = p$. 证明 G 必有一个共轭类, 其大小为 p.

第13章 特 征 标

假设 $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ 是有限群 G 的一个表示. 对每个 $n \times n$ 矩阵 $g\rho$ $(g \in G)$, 我们将这个矩阵对角线上所有元素加起来, 得到一个复数, 并记这个数为 $\chi(g)$. 函数 $\chi : G \to \mathbb{C}$ 称为表示 ρ 的特征标. 表示的特征标有一些显著的性质, 并且这些性质是表示论计算时的基本工具. 例如, 后面将会说明, 两个表示有一样的特征标当且仅当两个表示是等价的. 另外, 像确定一个给定表示是不是不可约的这样的基本问题一样, 我们可以通过表示的特征标并利用简单的计算就可以解决. 这些事实是令人惊讶的, 因为从一个表示 $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ 的定义可以看出, 对每个矩阵 $g\rho$ 我们必须明了它的 n^2 个元素, 但特征标只记录了一个数.

特征标的理论在这本书剩余部分将会占据重要地位, 在这一章我们展示一些基本性质和例子.

矩 阵 的 迹

13.1 定义

若 $A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 矩阵, 那么 A 的迹, 记为 $\mathrm{tr}A$, 定义为

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

即 A 的迹是 A 的对角线上所有元素之和.

13.2 命题

令 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 为 $n \times n$ 矩阵. 那么

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B, \text{且}$$
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

此外, 若 T 是一个可逆的 $n \times n$ 矩阵, 那么

$$\mathrm{tr}(T^{-1}AT) = \mathrm{tr}A.$$

证明 $A+B$ 的第 i 行第 i 列的元素为 $a_{ii}+b_{ii}$, AB 的第 i 行第 i 列的元素为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$. 所以

$$\operatorname{tr}(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\operatorname{tr}A+\operatorname{tr}B,$$

且

$$\operatorname{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}=\operatorname{tr}(BA).$$

最后有

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(T^{-1}AT)&=\operatorname{tr}((T^{-1}A)T)\\&=\operatorname{tr}(T(T^{-1}A)) \qquad \text{由第二个式子得到}\\&=\operatorname{tr}(A).\end{aligned}$$

证毕.

我们可以注意到, 与行列式不同, 迹不保乘法; 也就是, $\operatorname{tr}(AB)$ 不一定等于 $(\operatorname{tr}A)(\operatorname{tr}B)$.

特　征　标

13.3　定义

假设 V 是一个基为 $\mathscr{B}$ 的 $\mathbb{C}G$-模. 那么 V 的特征标为如下定义的函数 $\chi: G\to\mathbb{C}$

$$\chi(g)=\operatorname{tr}[g]_{\mathscr{B}} \quad (g\in G).$$

因为若 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}'$ 为 V 的两组基, 那么存在一个可逆矩阵 T(参看 (2.24)) 使得

$$[g]_{\mathscr{B}'}=T^{-1}[g]_{\mathscr{B}}T,$$

V 的特征标不依赖于基 $\mathscr{B}$. 并且根据命题 13.2, 对任意的 $g\in G$ 有

$$\operatorname{tr}[g]_{\mathscr{B}'}=\operatorname{tr}[g]_{\mathscr{B}}.$$

定义表示 $\rho: G\to GL(n,\mathbb{C})$ 的特征标为其相应 $\mathbb{C}G$-模 $\mathbb{C}^n$ 的特征标 χ, 即

$$\chi(g)=\operatorname{tr}(g\rho) \quad (g\in G).$$

13.4　定义

如果 χ 是某个 $\mathbb{C}G$-模的特征标, 那么 χ 是 G 的一个特征标. 另外, 如果 χ 是某个不可约 $\mathbb{C}G$-模的特征标, 那么 χ 是 G 的一个不可约特征标; χ 是一个可约 $\mathbb{C}G$-模的特征标, 那么 χ 是可约的.

读者会注意到我们把特征标作为函数写在了左侧, 也就是记为 $\chi(g)$ 而不是 $g\chi$.

13.5　命题

(1) 同构的 $\mathbb{C}G$-模有相同的特征标.

(2) 若 x 与 y 是群 G 中的共轭元, 那么对 G 的任意特征标 χ 有

$$\chi(x) = \chi(y).$$

证明　(1) 假设 V 与 W 是同构的 $\mathbb{C}G$-模. 那么由 (7.7), 存在 V 的一组基 $\mathscr{B}_1$ 和 W 的一组基 $\mathscr{B}_2$ 使得对任意的 $g \in G$ 有

$$[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}.$$

因此对任意的 $g \in G$ 有 $\mathrm{tr}[g]_{\mathscr{B}_1} = \mathrm{tr}[g]_{\mathscr{B}_2}$, 所以 V 与 W 有相同的特征标.

(2) 假设 x 与 y 是 G 中的共轭元, 所以存在 $g \in G$ 使得 $x = g^{-1}yg$. 令 V 是一个 $\mathbb{C}G$-模, $\mathscr{B}$ 是 V 的一组基. 那么

$$[x]_{\mathscr{B}} = [g^{-1}yg]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}}^{-1}[y]_{\mathscr{B}}[g]_{\mathscr{B}}.$$

因此根据命题 13.2, 有 $\mathrm{tr}[x]_{\mathscr{B}} = \mathrm{tr}[y]_{\mathscr{B}}$. 所以 $\chi(x) = \chi(y)$, 其中 χ 是 V 的特征标. 证毕.

与命题 13.5(1) 相应的关于表示的结论是等价的表示有相同的特征标.

后面我们将会证明命题 13.5(1) 的逆命题, 一个令人惊讶的结论, 如果两个 $\mathbb{C}G$-模有相同的特征标, 那么它们是同构的.

13.6　例子

(1) 令 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, 并设 $\rho : G \to GL(2, \mathbb{C})$ 为表示

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(参见例 3.2(1)). 令 χ 为这个表示的特征标. 下面的表格记录了当 g 取遍 G 所有元素时的 $g, g\rho$ 和 $\chi(g)$ (通过将 $g\rho$ 对角线上的两个元素加起来得到 $\chi(g)$).

g	1	a	a^2	a^3
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	2	0	-2	0

g	b	ab	a^2b	a^3b
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	0	0	0	0

(2) 令 $G = S_3$, 取 V 是 G 在 $\mathbb{C}$ 上的 3 维置换模 (参见定义 4.10). 令 $\mathscr{B}$ 为 V 的自然基; 那么 $\mathscr{B}$ 为基 v_1, v_2, v_3, 其中对任意的 $1 \leqslant i \leqslant 3, g \in G$ 有 $v_i g = v_{ig}$. 矩阵 $[g]_{\mathscr{B}}(g \in G$ 是由习题 4.1 给定的. 我们将这些矩阵同 V 的特征标 χ 一起记录为下表.

g	1	(12)	(13)
$[g]_{\mathscr{B}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	3	1	1

g	(23)	(123)	(132)
$[g]_{\mathscr{B}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	1	0	0

(3) 令 $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1\rangle$. 根据定理 9.8, G 只有三个不可约特征标 χ_1, χ_2, χ_3, 值为

g	1	a	a^2
$\chi_1(g)$	1	1	1
$\chi_2(g)$	1	ω	ω^2
$\chi_3(g)$	1	ω^2	ω

其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$.

(4) 令 $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$(所以 $G \cong S_3$). 在例 10.8(2) 中, 我们找到了一个不同构的不可约 $\mathbb{C}G$-模的完全集 U_1, U_2, U_3. 这样若 U_i 的特征

标是 χ_i, 其中 $1 \leqslant i \leqslant 3$, 那么 G 的不可约特征标是 χ_1, χ_2 和 χ_3. 这些特征标在 G 中元素上的值可以通过例 10.8(2) 中给定的相应表示 ρ_1, ρ_2, ρ_3 来计算, 如下:

g	1	a	a^2	b	ab	a^2b
$\chi_1(g)$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2(g)$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_3(g)$	2	-1	-1	0	0	0

注意到上面所有的例子中, 给定的特征标取了一些不同的数. 这反映了命题 13.5(2) 的结论: 每个特征标在 G 的共轭类上是常值. 另外, 对群中的元素 g 来说, 写一个复数 $\chi(g)$ 比记下 g 对应的矩阵快得多. 虽然如此, 特征标压缩了有关表示的大量信息. 随着特征标理论的发展, 这变得显而易见.

13.7　定义

若 χ 是 $\mathbb{C}G$-模 V 的特征标, 那么 V 的维数称为 χ 的次数.

13.8　例子

(1) 例 13.6(1) 中给出了 D_8 的一个次数为 2 的特征标; 例 13.6(2) 中给出了 S_3 的一个次数为 3 的特征标; 例 13.6(4) 中可以看出 D_6 的不可约特征标次数为 1, 1, 2.

(2) 如果 V 是任意一个 1 维的 $\mathbb{C}G$-模, 那么对每个 $g \in G$, 存在一个复数 λ_g 使得对任意的 $v \in V$ 有 $vg = \lambda_g v$. V 的特征标 χ 是由

$$\chi(g) = \lambda_g \quad (g \in G)$$

给定的, 并且 χ 的次数为 1. 次数为 1 的特征标称为线性特征标; 当然也是不可约特征标.

观察知定理 9.8 给出的有限交换群的所有不可约特征标; 特别地, 它们都是线性特征标.

G 的每个线性特征标都是从 G 到非零复数组成的乘法群的一个同态. 事实上, 这是 G 仅有的同态的非零特征标 (参看习题 13.4).

(3) 平凡 $\mathbb{C}G$-模 (参看定义 4.8(1)) 的特征标是一个线性特征标, 称为 G 的平凡特征标, 记为 1_G. 这样对任意的 $g \in G$ 有

$$1_G : g \mapsto 1.$$

给定任意一个群 G, 我们至少知道 G 的一个不可约特征标, 也就是平凡特征标. 要找到所有的不可约特征标通常是很困难的.

特征标的值

接下来的结论给出了复数 $\chi(g)$ 的相关信息, 其中 χ 是 G 的一个特征标, 且 $g \in G$.

13.9　命题

令 χ 是 $\mathbb{C}G$-模 V 的特征标. 假设 $g \in G$ 且 g 的阶为 m. 那么

(1) $\chi(1) = \dim V$;

(2) $\chi(g)$ 是 m 次单位根的一个和;

(3) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$;

(4) 如果 g 与 g^{-1} 共轭, $\chi(g)$ 是一个实数;

证明　(1) 令 $n = \dim V, \mathscr{B}$ 为 V 的一组基. 那么单位元 1 在基 $\mathscr{B}$ 下的矩阵 $[1]_{\mathscr{B}}$ 等于 $n \times n$ 的单位矩阵 I_n. 因此 $\chi(1) = \operatorname{tr}[1]_{\mathscr{B}} = \operatorname{tr} I_n = n$, 所以 $\chi(1) = \dim V$.

(2) 根据命题 9.11, 存在 V 的一组基 $\mathscr{B}$ 使得

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_n \end{pmatrix},$$

其中 ω_i 是一个 m 次单位根. 所以

$$\chi(g) = \omega_1 + \ldots + \omega_n,$$

一个 m 次单位根的和.

(3) 有

$$[g^{-1}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_n^{-1} \end{pmatrix},$$

所以 $\chi(g^{-1}) = \omega_1^{-1} + \ldots + \omega_n^{-1}$. 因为对任意的实数 ϑ,

$$(e^{i\vartheta})^{-1} = e^{-i\vartheta},$$

其中 $(e^{i\vartheta})^{-1}$ 是 $e^{i\vartheta}$ 的共轭. 所以每个 m 次单位复根 ω 都满足 $\omega^{-1} = \overline{\omega}$. 所以

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\omega_1} + \ldots + \overline{\omega_n} = \overline{\chi(g)}.$$

(4) 若 g 与 g^{-1} 共轭, 那么根据命题 13.5(2), $\chi(g) = \chi(g^{-1})$. 由 (3) 得 $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$, 所以 $\chi(g) = \overline{\chi(g)}$; 也就是, $\chi(g)$ 是实数. 证毕.

当 G 中元素 g 的阶为 2 时, 则有更多关于 $\chi(g)$ 的值的具体信息:

13.10 推论

令 χ 为 G 的一个特征标, 并设 g 是 G 中一个阶为 2 的元素. 那么 $\chi(g)$ 是一个整数, 且

$$\chi(g) \equiv \chi(1) \mod 2.$$

证明 根据命题 13.9 有

$$\chi(g) = \omega_1 + \ldots + \omega_n,$$

其中 $n = \chi(1)$ 且每个 ω_i 都是一个平方单位根. 那么每个 ω_i 为 $+1$ 或 -1. 假设其中有 r 个 $+1$, s 个 -1, 那么

$$\chi(g) = r - s, \quad 且\chi(1) = r + s.$$

当然 $\chi(g) \in \mathbb{Z}$, 又因为 $r - s = r + s - 2s \equiv r + s \mod 2$, 所以有 $\chi(g) \equiv \chi(1) \mod 2$. 证毕.

接下来的结论揭示了特征标的重要性, 说明了我们要确定一个表示的核只需要知道它的特征标信息就可以了.

13.11 定理

令 $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ 为 G 的一个表示, χ 是 ρ 的一个特征标.

(1) 对 $g \in G$, 存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得

$$|\chi(g)| = \chi(1) \Leftrightarrow g\rho = \lambda I_n.$$

(2) $\mathrm{Ker}\rho = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}$.

证明 (1) 令 $g \in G$, 并设 g 的阶为 m. 若 $g\rho = \lambda I_n$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$, 那么 λ 是一个 m 次单位根, 且 $\chi(g) = n\lambda$, 所以 $|\chi(g)| = n = \chi(1)$.

反过来, 设 $|\chi(g)| = \chi(1)$. 根据命题 9.11, 存在 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\mathscr{B}$, 使得

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_n \end{pmatrix},$$

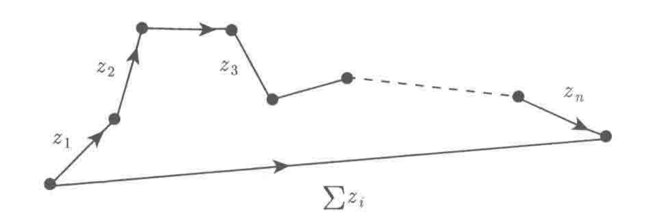
其中 ω_i 是一个 m 次单位根. 那么

(13.12) $$|\chi(g)| = |\omega_1 + \ldots + \omega_n| = \chi(1) = n.$$

而对任意的的复数 $z_1, \ldots, z_n$, 有

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n|,$$

等号成立当且仅当 $z_1, \ldots, z_n$ 都相等.



因为对任意的 i 有 $|\omega_i| = 1$. 我们可以从 (13.12) 推出对任意的 i, j 有 $\omega_i = \omega_j$. 所以

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_n \end{pmatrix} = \omega_1 I_n.$$

因此对 $\mathbb{C}^n$ 的所有基 $\mathscr{B}$ 有 $[g]_{\mathscr{B}'} = \omega_1 I_n$, 所以 $g\rho = \omega_1 I_n$. 这就完成了 (1) 的证明.

(2) 若 $g \in \mathrm{Ker}\rho$ 那么 $g\rho = I_n$, 所以 $\chi(g) = n = \chi(1)$.

反过来, 假设 $\chi(g) = \chi(1)$. 那么根据 (1), 存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $g\rho = \lambda I_n$. 这也就是说 $\chi(g) = \lambda\chi(1)$, 所以 $\lambda = 1$, 故 $g\rho = I_n$, 所以 $g \in \mathrm{Ker}\rho$. 第 (2) 部分得证. 证毕.

针对定理 13.11(2), 定义特征标的核如下.

13.13　定义

若 χ 是 G 的一个特征标, 那么 χ 的核定义为

$$\mathrm{Ker}\chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\},$$

记为 $\mathrm{Ker}\chi$. 根据定理 13.11(2), 若 ρ 是 G 的一个表示, 特征标为 χ, 那么 $\mathrm{Ker}\rho = \mathrm{Ker}\chi$. 特别地, $\mathrm{Ker}\chi \lhd G$. 如果 $\mathrm{Ker}\chi = \{1\}$, 称 χ 为一个忠实特征标.

13.14　例子

(1) 根据例 13.6(4), 群 $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ 的不可约特征标是 χ_1, χ_2, χ_3, 其值如下:

g	1	a	a^2	b	ab	a^2b
$\chi_1(g)$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2(g)$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_3(g)$	2	-1	-1	0	0	0

那么 $\text{Ker}\chi_1 = G, \text{Ker}\chi_2 = \langle a \rangle, \text{Ker}\chi_3 = \{1\}$. 特别地, χ_3 是 D_6 的一个忠实不可约特征标.

(2) 令 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle, \chi$ 为例 13.6(1) 中所给的 G 的特征标:

g	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
$\chi(g)$	2	0	-2	0	0	0	0	0

那么 $\text{Ker}\chi = \{1\}$, 所以 χ 是一个忠实特征标. 由于 $|\chi(a^2)| = |-2| = \chi(1)$, 根据定理 13.11(1), 如果 $\rho : G \to GL(2, \mathbb{C})$ 是一个特征标为 χ 的一个表示, 那么 $a^2\rho = -I$.

接下来要证明的结论, 对从给定的特征标构造一个新的特征标很有用. 对 G 的一个特征标 χ, 定义 $\overline{\chi} : G \to \mathbb{C}$ 为

$$\overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)} \quad (g \in G).$$

这样 $\overline{\chi}$ 的值是 χ 的值的共轭.

13.15 命题

令 χ 是 G 的一个特征标. 那么 $\overline{\chi}$ 也是 G 的一个特征标. 如果 χ 是不可约的, 那么 $\overline{\chi}$ 也是不可约的.

证明　设 χ 是表示 $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ 对应的特征标, 那么

$$\chi(g) = \text{tr}(g\rho) \quad (g \in G).$$

如果 $A = (a_{ij})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个 $n \times n$ 矩阵, 那么定义 $\overline{A}$ 为 $n \times n$ 矩阵 $(\overline{a}_{ij})$. 观察可知, 如果 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 $n \times n$ 矩阵, 那么

(13.16)
$$(\overline{AB}) = \overline{A}\,\overline{B}.$$

因为 $\overline{A}\,\overline{B}$ 的第 i 行第 j 列元素为

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{ik}\overline{b}_{kj},$$

与 AB 的第 i 行第 j 列元素 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ 的共轭相等.

由 (13.16) 推出由

$$g\overline{\rho} = \overline{(g\rho)} \quad (g \in G)$$

定义的函数 $\overline{\rho}: G \to GL(n, \mathbb{C})$ 是 G 的一个表示. 因为

$$\text{tr}(g\overline{\rho}) = \text{tr}(\overline{g\rho}) = \overline{\text{tr}(g\rho)} = \overline{\chi(g)} \quad (g \in G),$$

所以表示 $\overline{\rho}$ 的特征标是 $\overline{\chi}$.

显然, 如果 ρ 可约, 那么 $\overline{\rho}$ 可约. 因此 χ 不可约当且仅当 $\overline{\chi}$ 不可约. 证毕.

正则特征标

13.17 定义

G 的正则特征标是正则 $\mathbb{C}G$-模的特征标. 我们将正则特征标记为 χ_{reg}.

在定理 13.19 中, 将会用 G 的不可约特征标来表示正则特征标. 首先需要一个预备知识.

13.18 命题

令 V 是一个 $\mathbb{C}G$-模, 并假设

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r,$$

不可约 $\mathbb{C}G$-模 U_i 的一个直和. 那么 V 的特征标与 $\mathbb{C}G$-模 $U_1 \ldots U_r$ 的特征标之和相等.

证明 由 (7.10) 可直接推出. 证毕.

13.19 定理

令 $V_1, \ldots, V_k$ 是互不同构的不可约 $\mathbb{C}G$-模的一个完全集 (参见定义 11.11), 对 $i = 1, \ldots, k$, 令 χ_i 是 V_i 的特征标, 并且令 $d_i = \chi_i(1)$. 那么

$$\chi_{\text{reg}} = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k.$$

证明 根据定理 11.9,

$$\mathbb{C}G \cong (V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \ldots \oplus V_2) \oplus \ldots \oplus (V_k \oplus \ldots \oplus V_k),$$

其中对每个 i 都有 d_i 个因子 V_i. 现在由命题 13.18 即可得所证结论. 证毕.

χ_{reg} 在 G 中元素上的值是很容易描述的, 并且在接下来的结论中将会给出.

13.20　命题

若 χ_{reg} 是 G 的正则特征标, 那么

$$\chi_{\text{reg}}(1) = |G|, \quad 且$$
$$\chi_{\text{reg}}(g) = 0, \quad 如果 g \neq 1.$$

证明　设 $g_1, \ldots, g_n$ 为 G 的元素, 并设 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbb{C}G$ 的基 $g_1, \ldots, g_n$. 由命题 13.9(1), 有 $\chi_{\text{reg}}(1) = \dim\mathbb{C}G = |G|$.

现在设 $g \in G$ 且 $g \neq 1$, 那么对 $1 \leqslant i \leqslant n$, 存在某个 j 使得 $g_i g = g_j$, 其中 $j \neq i$. 所以矩阵 $[g]_{\mathscr{B}}$ 的第 i 行除了第 j 列位置外均为 0; 特别地, 对角线元素均为零. 所以满足

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \text{tr}[g]_{\mathscr{B}} = 0.$$

证毕.

13.21　例子

我们用群 $G = D_6$ 为例来验证定理 13.19 与命题 13.20. 根据例 13.6(4) 知, G 的不可约特征标为 χ_1, χ_2, χ_3：

g	1	a	a^2	b	ab	a^2b
$\chi_1(g)$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2(g)$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_3(g)$	2	-1	-1	0	0	0

计算 $\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$：

g	1	a	a^2	b	ab	a^2b
$(\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3)(g)$	6	0	0	0	0	0

根据定理 13.19, 这就是 G 的正则特征标; 并且在单位元 1 上取值为 $|G|$, 在 G 的所有非单位元上取值为 0, 这就例证了命题 13.20.

置换特征标

当 G 为对称群 S_n 的子群时, 有一个利用置换模产生一个次数为 n 的特征标的简单构造, 下面进行具体描述.

假设 G 是 S_n 的一个子群, 那么 G 是一个由 $\{1, \ldots, n\}$ 中的置换组成的群. G 在 $\mathbb{C}$ 上的置换模 V 有一组基 $v_1, \ldots, v_n$, 对任意的 $g \in G$ 有

$$v_i g = v_{ig} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

(参见定义 4.10). 记基 $v_1,\ldots,v_n$ 为 $\mathscr{B}$. 那么如果 $ig \neq i$, 矩阵 $[g]_{\mathscr{B}}$ 的 ii-元取值为 0, 如果 $ig = i$, 则矩阵 $[g]_{\mathscr{B}}$ 的 ii-元取值为 1. 所以置换模 V 的特征标 π 是由以下式子给出

$$\pi(g) = (\text{使得 } ig = i \text{ 的 } i \text{ 的个数}).$$

对 $g \in G$, 令

$$\text{fix}(g) = \{i : 1 \leqslant i \leqslant n \text{且} ig = i\}.$$

那么

(13.22)
$$\pi(g) = |\text{fix}(g)| \quad (g \in G).$$

称 π 为 G 的置换特征标.

13.23 例子

令 $G = S_4$. 那么由例 12.16(3) 知, G 有 5 个共轭类, 代表元分别是

$$1, (12), (123), (12)(34), (1234).$$

置换特征标 π 取值为

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
$\pi(g_i)$	4	2	1	0	0

13.24 命题

令 G 是 S_n 的一个子群. 那么由

$$\nu(g) = |\text{fix}(g)| - 1 \quad (g \in G)$$

定义的函数 $\nu : G \to \mathbb{C}$ 是 G 的一个特征标.

证明 令 $v_1,\ldots,v_n$ 是置换模 V 的一组基, 且令

$$u = v_1 + \ldots + v_n, \quad \text{且} U = sp(u).$$

观察知对任意的 $g \in G$ 有 $ug = u$, 所以 U 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模. 实际上, U 同构于平凡 $\mathbb{C}G$-模, 所以 U 的特征标是平凡特征标 1_G(参见例 13.8(3)). 由 Maschke 定理 8.1 得, 存在 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模 W 使得

$$V = U \oplus W.$$

令 ν 是 W 的特征标, 那么 $\pi = 1_G + \nu$, 所以对任意的 $g \in G$ 有 $|\text{fix}(g)| = 1 + \nu(g)$, 所以

$$\nu(g) = |\text{fix}(g)| - 1 \quad (g \in G).$$

证毕.

13.25 例子

令 $G = A_4$为 S_4 的一个子群. 由例 12.18(1) 知, G 的共轭类代表元分别是

$$1, (12)(34), (123), (132).$$

G 的特征标 ν 取值为

g_i	1	(12)(34)	(123)	(132)
$\nu(g_i)$	3	-1	0	0

第 13 章总结

1. 表示的特征标通过计算相应矩阵的迹得到.
2. 特征标在一个共轭类上取值是一个常数.
3. 同构的 $\mathbb{C}G$-模有相同的特征标.
4. 对任意的 $g \in G$, 与 G 的任意特征标 χ, 复数 $\chi(g)$ 是单位根的一个和, 且 $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.
5. 一个表示的特征标决定了这个表示的核.
6. G 的正则特征标在单位元上取值 $|G|$, 在 G 的其他元素上取值为 0.
7. 如果 G 是 S_n 的一个子群, 那么由

$$\nu(g) = |\text{fix}(g)| - 1 \quad (g \in G)$$

定义的函数 ν 是 G 的一个特征标.

第 13 章习题

1. 令 $G = D_{12} = \langle a, b : a^6 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, 且 ρ_1, ρ_2 是 G 的表示, 其中

$$a\rho_1 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad b\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{其中}\omega = e^{2\pi i/3})$$

且

$$a\rho_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

找到 ρ_1 和 ρ_2 的特征标. 找到 $\text{Ker}\rho_1$ 和 $\text{Ker}\rho_2$; 并检验你的答案是否与定理 13.11 一致.

2. 找到 C_4 的所有不可约特征标. 并将 C_4 的正则特征标写成这些特征标的线性组合.
3. 令 χ 是 S_7 的 7-维置换模的特征标. 找到 $\chi(x)$, 其中 $x = (12)$ 和 $x = (16)(235)$.
4. 证明 G 的仅有的同态的非零特征标是线性特征标.

5. 设 χ 是 G 的一个不可约特征标, 假设 $z \in Z(G)$ 并且 z 的阶为 m, 证明存在一个 m 次单位根 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得对任意的 $g \in G$ 有 $\chi(zg) = \lambda\chi(g)$.

6. 证明若 χ 是群 G 的一个忠实不可约特征标, 那么 $Z(G) = \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(1)\}$.

7. 令 ρ 是群 G 在 $\mathbb{C}$ 上的一个表示.

(a) 说明 $\delta : g \mapsto \det(g\rho)$ $(g \in G)$ 是 G 的一个线性特征标.

(b) 证明 $G/\mathrm{Ker}\delta$ 是一个交换群.

(c) 假设存在某个 $g \in G$ 有 $\delta(g) = -1$. 说明 G 有一个指数为 2 的正规子群.

8. 令 G①是一个 $2k$ 阶群, 其中 k 是一个奇数. 通过考虑 G 的正则表示, 说明 G 有一个指数为 2 的正规子群.

9. 令 χ 是群 G 的一个特征标, 令 g 是 G 中一个阶为 2 的元素. 说明下面两个结论至少有一个成立.

(1) $\chi(g) \equiv \chi(1) \bmod 4$.

(2) G 有一个指数为 2 的正规子群.

(与推论 13.10 比较 (提示: 利用习题第 7 题)).

10. 证明若 x 是群 G 的非单位元, 那么存在 G 的某个不可约特征标 χ 有 $\chi(x) \neq \chi(1)$.

---

① 原书为"g", 译者修正为"G".

第 14 章 特征标的内积

在这一章中, 讨论特征标的一些重要的性质, 特别地, 我们得到了一个重要的结果 (定理 14.21), 这个定理说明了如果两个 $\mathbb{C}G$-模有相同的特征标, 那么它们是同构的. 同时, 我们用特征标给出了一种方法, 这个方法可以分解一个给定的 $\mathbb{C}G$-模为 $\mathbb{C}G$-子模的直和.

证明过程涉及群的特征标的内积, 先定义这个内积.

内 积

一个有限群 G 的特征标是从 G 到 $\mathbb{C}$ 的某个函数. 如果定义自然加法和复数的数乘, 那么从 G 到 $\mathbb{C}$ 的所有函数全体构成了 $\mathbb{C}$ 上的一个向量空间. 也就是说, 如果 ϑ, ϕ 是从 G 到 $\mathbb{C}$ 的函数, $\lambda \in \mathbb{C}$, 那么如下定义 $\vartheta + \phi : G \to \mathbb{C}$,

$$(\vartheta + \phi)(g) = \vartheta(g) + \phi(g) \quad (g \in G).$$

如下定义 $\lambda\vartheta : G \to \mathbb{C}$

$$\lambda\vartheta(g) = \lambda(\vartheta(g)) \quad (g \in G)$$

(把这些函数写在左边是与我们对特征标的注记相符合的).

14.1 例子

令 $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$, 假设 $\vartheta : G \to \mathbb{C}$ 和 $\phi : G \to \mathbb{C}$ 是由如下给出的:

	1	a	a^2
ϑ	2	i	-1
ϕ	1	1	1

这个表示 $\vartheta(1) = 2, \vartheta(a) = i, \vartheta(a^2) = -1; \phi(1) = \phi(a) = \phi(a^2) = 1$. 那么 $\vartheta + \phi$ 和 3ϑ 是由如下给出的:

	1	a	a^2
$\vartheta + \phi$	3	$1 + i$	0
3ϑ	6	$3i$	-3

通常把从 G 到 $\mathbb{C}$ 的函数看成行向量, 就像在这个例子中一样.

我们可以对从 G 到 $\mathbb{C}$ 的所有函数组成的向量空间赋予一个内积, 下面简要地说明定义的方式. $\mathbb{C}$ 上的向量空间的一个内积的定义是按照如下方式的. 对于向量空间的每个有序对向量 ϑ, ϕ, 存在一个满足以下条件的一个复数 $\langle\vartheta, \phi\rangle$:

(14.2)

(a) $\langle\vartheta, \phi\rangle = \overline{\langle\phi, \vartheta\rangle}(\forall\phi, \vartheta)$;

(b) $\langle\lambda_1\vartheta_1 + \lambda_2\vartheta_2, \phi\rangle = \lambda_1\langle\vartheta_1, \phi\rangle + \lambda_2\langle\vartheta_2, \phi\rangle$, 对于所有的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, 所有的向量 $\vartheta_1, \vartheta_2, \phi$;

(c) 如果 $\vartheta \neq 0$, 那么 $\langle\vartheta, \vartheta\rangle > 0$.

注意到条件 (a) 说明 $\langle\vartheta, \vartheta\rangle$ 恒为实数, 条件 (a) 和条件 (b) 说明对于所有的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, 所有的向量 $\vartheta_1, \vartheta_2, \phi$ 有

$$\langle\phi, \lambda_1\vartheta_1 + \lambda_2\vartheta_2\rangle^{①} = \overline{\lambda_1}\langle\phi, \vartheta_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle\phi, \vartheta_2\rangle.$$

现在引进从 G 到 $\mathbb{C}$ 的所有函数组成的向量空间的一个内积. 这对我们研究特征标有着重要的意义.

14.3 定义

假设 ϑ, ϕ 是从 G 到 $\mathbb{C}$ 的函数. 如下定义

$$\langle\vartheta, \phi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\vartheta(g)\overline{\phi(g)}.$$

显然有 (14.2) 的条件成立, 所以 $\langle\ ,\ \rangle$ 是从 G 到 $\mathbb{C}$ 的所有函数组成的向量空间的一个内积.

14.4 例子

就像在例 14.1 中那样, 假设 $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1\rangle$, 并且 ϑ 和 ϕ 是由如下给出:

	1	a	a^2
ϑ	2	i	-1
ϕ	1	1	1

那么

$$\langle\vartheta, \phi\rangle^{②} = \frac{1}{3}(2\cdot 1 + i\cdot 1 - 1\cdot 1) = \frac{1}{3}(1+i),$$

① 原书为"$\langle\phi, \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\vartheta_2\rangle$", 译者修正为"$\langle\phi, \lambda_1\vartheta_1 + \lambda_2\vartheta_2\rangle$".

② 原书为"$\langle\theta, \phi\rangle$", 译者修正为"$\langle\vartheta, \phi\rangle$".

③ 原书为"$\langle\theta, \theta\rangle$", 译者修正为"$\langle\vartheta, \vartheta\rangle$".

$$\langle \vartheta, \vartheta \rangle^{③} = \frac{1}{3}(2 \cdot 2 + i \cdot \bar{i} + (-1) \cdot (-1)) = 2,$$

$$\langle \phi, \phi \rangle = \frac{1}{3}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 1.$$

特征标的内积

在这里我们将会说明一个事实: 特征标在一个共轭类上取值是不变的, 这样就可以在计算两个特征标的内积时稍稍简化.

14.5 命题

假设 G 有 l 个共轭类, 代表元分别为 $g_1, \ldots, g_l$. 令 χ 和 ψ 是 G 的特征标, 那么

(1) $\langle \chi, \psi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1})$, 并且它是一个实数.

(2) $\langle \chi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{l} \dfrac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{|C_G(g_i)|}$.

证明 (1) 由命题 13.9(3), 对于所有的 $g \in G$, 有 $\overline{\psi(g)} = \psi(g^{-1})$. 因此, 有

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}).$$

因为 $\{g^{-1} : g \in G\} = G$, 也有

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \psi(g) = \langle \psi, \chi \rangle.$$

因为 $\langle \psi, \chi \rangle = \overline{\langle \chi, \psi \rangle}$, 所以 $\langle \chi, \psi \rangle$ 是一个实数 (稍后将会证明 $\langle \chi, \psi \rangle$ 实际上是一个整数).

(2) g_i^G 表示 g_i 在 G 中的共轭类. 因为在同一个共轭类中特征标是不变的, 所以有

$$\sum_{g \in g_i^G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = |g_i^G| \chi(g_i) \overline{\psi(g_i)}.$$

现在有

$$G = \bigcup_{i=1}^{l} g_i^G, \quad |g_i^G| = |G|/|C_G(g_i)|,$$

由推论 12.3 和定理 12.8, 有

$$\begin{aligned}\langle\chi,\psi\rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\psi(g)}\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{l}\sum_{g\in g_i^G}\chi(g)\overline{\psi(g)}\\ &= \sum_{i=1}^{l}\frac{|g_i^G|}{|G|}\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}\\ &= \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{|C_G(g_i)|}\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}.\end{aligned}$$

证毕.

14.6 例子

交错群 A_4 有 4 个共轭类, 代表元分别是

$$g_1 = 1,\quad g_2 = (12)(34),\quad g_3 = (123),\quad g_4 = (132)$$

(见例子 12.18(1)). 我们将会在第 18 章中看到有 A_4 的两个特征标 χ 和 ψ 在代表元 g_i 上取值如下表:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	12	4	3	3
χ	1	1	ω	ω^2
ψ	4	0	ω^2	ω

(其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$). 应用命题 14.5 的 (2) 可以知道

$$\langle\chi,\psi\rangle = \frac{1\cdot 4}{12} + \frac{1\cdot 0}{4} + \frac{\omega\cdot\overline{\omega}^2}{3} + \frac{\omega^2\cdot\overline{\omega}}{3} = 0,$$

$$\langle\psi,\psi\rangle = \frac{4\cdot 4}{12} + \frac{0\cdot 0}{4} + \frac{\omega^2\cdot\overline{\omega}^2}{3} + \frac{\omega\cdot\overline{\omega}}{3} = 2.$$

建议读者自己验证 $\langle\chi,\chi\rangle = 1$, 并且算出 χ 和 ψ 与平凡特征标的内积 (平凡特征标在 A_4 的所有元素上都取值 1).

现在为证明最重要的结果 (定理 14.12) 作准备, 我们来说明 G 的不可约的特征标形成了由从 G 到 $\mathbb{C}$ 的函数组成的向量空间的一个标准正交基. 也就是说, 对于 G 的不同的不可约的特征标 χ 和 ψ 来说, 有 $\langle\chi,\chi\rangle = 1, \langle\chi,\psi\rangle = 0$.

回忆第 10 章, 正则 $\mathbb{C}G$-模是不可约的 $\mathbb{C}G$-子模的一个直和, 即

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_r,$$

并且每个不可约的 $\mathbb{C}G$-模都同构于 $\mathbb{C}G$-模 $U_1, U_2, \ldots, U_r$ 中的一个. 有很多种方法选择 $\mathbb{C}G$-子模 W_1 和 W_2 使得 $\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2$ 成立, 并且 W_1 和 W_2 没有共同的合成因子 (见定义 10.4). 例如, 可以把那些同构于给定的不可约的 $\mathbb{C}G$-模的 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的和当做 W_1, 余下的 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的和当做 W_2. 我们将会研究把 $\mathbb{C}G$ 写成这种形式将会得到的一些结论. 因此, 暂时采用以下假说:

14.7　假说

令 $\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2$, 其中 W_1 和 W_2 是 $\mathbb{C}G$-子模, 并且它们没有共同的合成因子. 记 $1 = e_1 + e_2$, 其中 $e_1 \in W_1, e_2 \in W_2$.

至于一些其他的结果, 我们将通过 W_1 的特征标为 e_1 导出一个公式.

先看看把 $\mathbb{C}G$ 中的元素 e_1 和 e_2 作用在 W_1 和 W_2 上会有一些什么结果.

14.8　命题

对于任意的 $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$, 有

$$\begin{aligned} w_1 e_1 &= w_1, \quad w_2 e_1 = 0, \\ w_1 e_2 &= 0, \quad w_2 e_2 = w_2. \end{aligned}$$

证明　如果 $w_1 \in W_1$, 那么函数 $w_2 \mapsto w_1 w_2$ $(w_2 \in W_2)$ 显然是一个从 W_2 到 W_1 的 $\mathbb{C}G$-同态. 但是 W_2 和 W_1 没有共同的合成因子, 所以由命题 11.3 得知, 每个从 W_2 到 W_1 的 $\mathbb{C}G$-同态是零. 因此, 对于所有的 $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ 来说, 有 $w_1 w_2 = 0$. 相似地, 有 $w_2 w_1 = 0$. 特别地, 有 $w_1 e_2 = w_2 e_1 = 0$. 现在

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1 1 = w_1(e_1 + e_2) = w_1 e_1, \\ w_2 &= w_2 1 = w_2(e_1 + e_2) = w_2 e_2, \end{aligned}$$

到此为止完成了定理的证明. 证毕.

14.9　推论

关于在假说 14.7 中出现的 $\mathbb{C}G$ 中的元素 e_1 和 e_2, 有

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0.$$

证明　在命题 14.8 中令 $w_1 = e_1, w_2 = e_2$ 即可. 证毕.

14.10　命题

令 χ 是在假说 14.7 中出现的 $\mathbb{C}G$-模 W_1 的特征标. 那么

$$e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g.$$

证明　令 $x \in G$, 函数

$$\vartheta : w \mapsto we_1x^{-1} \quad (w \in \mathbb{C}G)$$

是 $\mathbb{C}G$ 的一个自同态. 下面将会用两种方式来计算 ϑ 的迹.

首先, 由命题 14.8, 对于任意的 $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ 有

$$\begin{aligned} w_1\vartheta &= w_1e_1x^{-1} = w_1x^{-1}, \\ w_2\vartheta &= w_2e_1x^{-1} = 0. \end{aligned}$$

因此, ϑ 在 W_1 上的作用是 $w_1 \mapsto w_1x^{-1}$, 在 W_2 上的作用是 $w_2 \mapsto 0$. 由 W_1 的特征标 χ 的定义可以知道, W_1 的自同态 $w_1 \mapsto w_1x^{-1}$ 的迹等于 $\chi(x^{-1})$, 显然有 W_2 的自同态 $w_2 \mapsto 0$ 的迹是 0. 因此

$$\mathrm{tr}\vartheta = \chi(x^{-1}).$$

其次, $e_1 \in \mathbb{C}G$, 所以存在 $\lambda_g \in \mathbb{C}$ 有

$$e_1 = \sum_{g \in G} \lambda_g g.$$

由命题 13.20, 如果 $g \neq x$, 那么 $\mathbb{C}G$ 的自同态 $w \mapsto wgx^{-1}(w \in \mathbb{C}G)$ 的迹是 0, 如果 $g = x$, 那么迹是 $|G|$. 又因为 $\vartheta : w \mapsto w\sum_{g \in G} \lambda_g gx^{-1}$, 有

$$\mathrm{tr}\vartheta = \lambda_x|G|.$$

比较关于 $\mathrm{tr}\vartheta$ 的两个表达式, 对于任意的 $x \in G$, 有

$$\lambda_x = \chi(x^{-1})/|G|.$$

因此

$$e_1 = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g.$$

证毕.

14.11　推论

令 χ 是在假说 14.7 中出现的 $\mathbb{C}G$-模 W_1 的特征标. 那么

$$\langle \chi, \chi \rangle = \chi(1).$$

证明　应用定义 6.3 中 $\mathbb{C}G$ 中的乘法的定义, 我们由命题 14.10 推断出 e_1^2 中 1 的系数是

$$\frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})\chi(g)=\frac{1}{|G|}\langle\chi,\chi\rangle.$$

另一方面, 由推论 14.9 可知 $e_1^2=e_1$, 并且 e_1 中 1 的系数是 $\chi(1)/|G|$. 因此

$$\langle\chi,\chi\rangle=\chi(1).$$

证毕.

现在来证明有关于内积 $\langle\ ,\ \rangle$ 的主定理.

14.12　定理

令 U 和 V 是非同构的不可约的 $\mathbb{C}G$-模, 它们的特征分别是 χ 和 ψ. 那么

$$\langle\chi,\chi\rangle=1,\quad \langle\chi,\psi\rangle=0.$$

证明　回忆定理 11.9, 有 $\mathbb{C}G$ 是不可约 $\mathbb{C}G$-子模的直和, 即

$$\mathbb{C}G=U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_r,$$

其中同构于 U 的 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的数量是 $\dim U$. 令 $\dim U=m$, 定义 W 是同构于 U 的 m 个不可约的 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的和, X 是余下的 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的和. 那么

$$\mathbb{C}G=W\oplus X.$$

并且 W 的每个合成因子同构于 U, X 的任意一个合成因子都不同构于 U. 特别地, W 和 X 没有共同的合成因子. W 的特征标是 $m\chi$, 这是因为 W 是 m 个 $\mathbb{C}G$-子模的直和, 并且每个 $\mathbb{C}G$-子模的特征标都是 χ.

现在对 W 的特征标应用推论 14.11, 得到

$$\langle m\chi,m\chi\rangle=m\chi(1).$$

因为 $\chi(1)=\dim U=m$, 有 $\langle\chi,\chi\rangle=1$.

下面令 Y 是同构于 U 或 V 的 $\mathbb{C}G$ 的 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的和, 令 Z 是余下的 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的和. 那么

$$\mathbb{C}G=Y\oplus Z.$$

并且 Y 和 Z 没有共同的合成因子. Y 的特征标是 $m\chi+n\psi$, 其中 $n=\dim V$. 由推论 14.11 得到

$$\begin{aligned}m\chi(1)+n\psi(1)&=\langle m\chi+n\psi,m\chi+n\psi\rangle\\&=m^2\langle\chi,\chi\rangle+n^2\langle\psi,\psi\rangle+mn(\langle\chi,\psi\rangle+\langle\psi,\chi\rangle).\end{aligned}$$

现在由我们已经证明过的定理的部分有 $\langle\chi,\chi\rangle=\langle\psi,\psi\rangle=1$, 并且 $\chi(1)=m,\psi(1)=n$. 因此

$$\langle\chi,\psi\rangle+\langle\psi,\chi\rangle=0.$$

由命题 14.5(1) 有 $\langle\chi,\psi\rangle=\langle\psi,\chi\rangle$, 因此 $\langle\chi,\psi\rangle=0$. 证毕.

定理 14.12 的应用

令 G 是一个有限群, 令 $V_1,\ldots,V_k$ 是非同构的不可约 $\mathbb{C}G$-模的一个完全集 (见定义 11.11). 如果 χ_i 是 V_i 的特征标, 其中 $1\leqslant i\leqslant k$, 那么由定理 14.12, 对于所有的 i,j, 有

(14.13) $$\langle\chi_i,\chi_j\rangle=\delta_{ij}.$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker delta 函数 (即如果 $i=j$, 那么 $\delta_{ij}=1$; 如果 $i\neq j$, 那么 $\delta_{ij}=0$). 特别地, 这表明了不可约特征标 $\chi_1,\ldots,\chi_k$ 是不同的.

现在令 V 是一个 $\mathbb{C}G$-模. 由定理 8.7, V 等于不可约的 $\mathbb{C}G$-子模的一个直和. 这些不可约 $\mathbb{C}G$-子模中的每一个都是同构于某个 U_i 的. 所以存在非负整数 $d_1,\ldots,d_k$ 使得

(14.14) $$V\cong(V_1\oplus\ldots\oplus V_1)\oplus\ldots\oplus(V_k\oplus\ldots\oplus V_k),$$

其中对于每个 i, 有 d_i 个 V_i.

因此 V 的特征标 ψ 是由如下给出的:

(14.15) $$\psi=d_1\chi_1+\ldots+d_k\chi_k.$$

应用 (14.13), 对于 $1\leqslant i\leqslant k$ 来说, 得到

(14.16) $$\langle\psi,\chi_i\rangle=\langle\chi_i,\psi\rangle=d_i,\quad\langle\psi,\psi\rangle=d_1^2+\ldots+d_k^2.$$

综上所述, 有

14.17 定理

令 $\chi_1,\ldots,\chi_k$ 是 G 的不可约特征标. 如果 ψ 是 G 的任意的特征标, 那么存在非负整数 $d_1,\ldots,d_k$ 使得

$$\psi=d_1\chi_1+\ldots+d_k\chi_k.$$

并且对于 $1\leqslant i\leqslant k$, 有

$$d_i=\langle\psi,\chi_i\rangle,\quad\langle\psi,\psi\rangle=d_1^2+\ldots+d_k^2.$$

14.18 例子

回忆例 13.6(4) 中 $S_3\cong D_6$ 的不可约的特征标是 χ_1,χ_2,χ_3, 在共轭类代表元 $(1),(12),(123)$ 上的取值如下:

g_i	1	(12)	(123)
$\|C_{S_3}(g_i)\|$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

现在令 ψ 是 S_3 的 3 维置换模的特征标. 由例 13.6(2) 可得

$$\psi(1) = 3, \quad \psi(12) = 1, \quad \psi(123) = 0.$$

因此, 由命题 14.5(2) 有

$$\langle \psi, \chi_1 \rangle = \frac{3 \cdot 1}{6} + \frac{1 \cdot 1}{2} + 0 = 1.$$

同样地有 $\langle \psi, \chi_2 \rangle = 0, \langle \psi, \chi_3 \rangle = 1$. 因此由定理 14.17, 有

$$\psi = \chi_1 + \chi_3$$

(这个结果也可以通过比较 ψ 和 $\chi_1 + \chi_3$ 在每个共轭类代表元上的值来得到).

这个问题的进一步的计算将在例 15.7 中给出.

下面来看看这个重要的定理 14.17 一些更多的应用.

14.19　定义

假设 ψ 是 G 的一个特征标, χ 是 G 的一个不可约的特征标. 如果 $\langle \psi, \chi \rangle \neq 0$, 那么就说 χ 是 ψ 的一个成分. 因此, ψ 的成分是那些在表达式 $\psi = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k$ 中有非零系数 d_i 的不可约的特征标 χ_i.

下面的一个结果是定理 14.12 的另一个重要的结果, 它给出了一个快速而又有效的方法来判断一个给定的 $\mathbb{C}G$-模是否是不可约的.

14.20　定理

令 V 是一个 $\mathbb{C}G$-模, 它的特征标是 χ. 那么 V 是不可约的当且仅当 $\langle \psi, \psi \rangle = 1$.

证明　如果 V 是不可约的, 那么由定理 14.12 得到 $\langle \psi, \psi \rangle = 1$.

反过来, 如果 $\langle \psi, \psi \rangle = 1$, 那么存在非负整数 $d_1, \ldots, d_k$ 使得

$$\psi = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k.$$

并且由 (14.16) 可知

$$1 = \langle \psi, \psi \rangle = d_1^2 + \ldots + d_k^2.$$

所以有且仅有一个 d_i 是 1, 其余都是 0. 那么由 (14.14), 存在某个 i 使得 $V \cong V_i$. 所以 V 是不可约的. 证毕.

现在证明一个重要的结果——一个 $\mathbb{C}G$-模是由它的特征标决定的. 这个结果推动了我们在书的余下部分关于特征标的研究. 因为这个结论意味着有关 $\mathbb{C}G$-模的许多问题可以通过特征标理论来解决.

14.21 定理

令 V 和 W 是 $\mathbb{C}G$-模, 它们的特征标分别是 χ 和 ψ. 那么 V 和 W 是同构的当且仅当 $\chi = \psi$.

证明 在命题 13.5 中, 我们已经证明了一个基本的结论——如果 V 和 W 是同构的, 那么 $\chi = \psi$. 下面证明定理的另一个方向.

假设 $\chi = \psi$. 再一次令 $V_1, \ldots, V_k$ 是非同构的不可约 $\mathbb{C}G$-模的完全集, 它们的特征标分别是 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$. 由 (14.14) 知道存在非负整数 $c_i, d_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 使得

$$V \cong (V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus \ldots \oplus (V_k \oplus \ldots \oplus V_k),$$

其中对于每个 i, 有 c_i 个 V_i. 并且有

$$W \cong (V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus \ldots \oplus (V_k \oplus \ldots \oplus V_k),$$

其中对于每个 i, 有 d_i 个 V_i. 由 (14.16) 有

$$c_i = \langle \chi, \chi_i \rangle, \quad d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle \quad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

因为 $\chi = \psi$, 所以对于所有的 i 来说, $c_i = d_i$. 因此, $V \cong W$. 证毕.

14.22 例子

令 $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$, 令 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ 是 G 在 $\mathbb{C}$ 上的表示, 其中

$$a\rho_1 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad a\rho_2 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix},$$

$$a\rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a\rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & \omega^{-1} \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$$

$(\omega = e^{2\pi i/3})$. 表示 $\rho_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的特征标是 ψ_i 如下表:

	1	a	a^2
ψ_1	2	2ω	$2\omega^2$
ψ_2	2	-1	-1
ψ_3	2	-1	-1
ψ_4	2	$1+\omega$	$1+\omega^2$

因此由定理 14.21 得到, 表示 ρ_2 和 ρ_3 是等价的, 但是 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ 之间没有其他相互等价的表示.

下一个定理是定理 14.12 的另一个结果.

14.23　定理

令 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ 是 G 的不可约的特征标. 那么 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ 是从 G 到 $\mathbb{C}$ 的所有的函数组成的向量空间中的线性无关的向量.

证明　假设

$$\lambda_1\chi_1 + \ldots + \lambda_k\chi_k = 0 \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}).$$

那么对于所有的 i 来说, 应用 (14.13) 得到

$$0 = \langle \lambda_1\chi_1 + \ldots + \lambda_k\chi_k, \chi_i \rangle = \lambda_i.$$

因此, $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ 是线性无关的. 证毕.

现在我们把特征标的内积和在第 11 章中建立的 $\mathbb{C}G$-同态空间联系起来.

14.24　定理

令 V 和 W 是 $\mathbb{C}G$-模, 它们的特征标分别是 χ 和 ψ. 那么

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \langle \chi, \psi \rangle.$$

证明　由 (14.14) 知道, 存在非负整数 $c_i, d_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 使得

$$V \cong (V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus \ldots \oplus (V_k \oplus \ldots \oplus V_k),$$

其中对于每个 i, 有 c_i 个 V_i. 并且有

$$W \cong (V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus \ldots \oplus (V_k \oplus \ldots \oplus V_k),$$

其中对于每个 i, 有 d_i 个 V_i. 又由命题 11.2, 对于任意的 i, j 有

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V_j)) = \delta_{ij}.$$

因此, 由 (11.5)(3) 得到

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \sum_{i=1}^{k} c_i d_i.$$

另一方面,

$$\chi = \sum_{i=1}^{k} c_i\chi_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^{k} d_i\psi_i.$$

所以由 (14.13) 有

$$\langle \chi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i d_i.$$

证毕.

分解 $\mathbb{C}G$-模

有时把一个给定的 $\mathbb{C}G$-模分解成 $\mathbb{C}G$-子模的一个直和形式是有实际意义的, 现在讨论如何分解.

我们再次应用假说 14.7:

令 $\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2$, 其中 W_1 和 W_2 是 $\mathbb{C}G$-子模, 并且它们没有共同的合成因子. 记 $1 = e_1 + e_2$, 其中 $e_1 \in W_1, e_2 \in W_2$.

令 V 是任意的 $\mathbb{C}G$-模. 记 $V = V_1 \oplus V_2$, 其中 V_1 的每个合成因子是 W_1 的一个合成因子, V_2 的每个合成因子是 W_2 的一个合成因子.

14.25　定理

在上面的记号下, 对于所有的 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, 有

$$v_1 e_1 = v_1, \quad v_2 e_1 = 0,$$
$$v_1 e_2 = 0, \quad v_2 e_2 = v_2.$$

证明　如果 $v_1 \in V_1$, 那么函数 $w_2 \mapsto v_1 w_2 (w_2 \in W_2)$ 显然是一个从 W_2 到 V_1 的 $\mathbb{C}G$-同态. 但是 W_2 和 V_1 没有共同的合成因子, 由命题 14.8 的证明过程可以得到所要证明的结果. 证毕.

14.26　命题

如果 χ 是 G 的一个不可约的特征标, V 是任意的 $\mathbb{C}G$-模, 那么

$$V\left(\sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g\right)$$

等于那些特征标是 χ 的 V 的 $\mathbb{C}G$-子模的和 (其中对于 $r \in \mathbb{C}G$, 定义 $Vr = \{vr : v \in V\}$).

证明　记

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r,$$

不可约 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的一个直和. 令 W_1 是那些特征标是 χ 的 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的和, 令 W_2 是余下的 $\mathbb{C}G$-子模 U_i 的和. 那么由定理 11.9 可以知道 W_1 的特征标是 $m\chi$, 其

中 $m = \chi(1)$. 并且 W_1 和 W_2 满足假说 14.7, 由命题 14.10 可以知道 W_1 的元素 e_1 是由如下给出

$$e_1 = \frac{m}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g.$$

令 V_1 是那些特征标是 χ 的 V 的 $\mathbb{C}G$-子模的和. 那么由命题 14.25 我们知道 $Ve_1 = V_1$. 很显然可以省略常数乘子 $m/|G|$, 所以

$$V_1 = V\left(\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g\right).$$

证毕.

一旦知道了群 G 的不可约的特征标, 命题 14.26 就提供了一个有用的方法, 这个方法可以找到一个给定的 $\mathbb{C}G$-模 V 的 $\mathbb{C}G$-子模. 步骤如下:

(14.27) (1) 选定 V 的一组基 $v_1, \ldots, v_n$.

(2) 对于 G 的每个不可约特征标 χ 来说, 计算向量 $v_i\left(\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g\right)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 令 V_χ 是由这些向量张成的 V 的子空间.

(3) 因为 χ 取遍了 G 的不可约特征标, 所以 V 是 $\mathbb{C}G$-模 V_χ 的直和. V_χ 的特征标是 χ 的一个数乘.

我们用一些简单的例子来说明这个方法. 这个方法的一些更复杂的应用将在第 32 章中讨论.

14.28 例子

(1) 令 G 是任意的有限群, V 是任意的非零的 $\mathbb{C}G$-模. 设 χ 是命题 14.26 中的 G 的平凡特征标, 我们看到

$$V\left(\sum_{g\in G} g\right)$$

是 V 的所有的平凡 $\mathbb{C}G$-子模的和. 例如, 令 $G = S_n$, 令 V 是置换模, 基是 $v_1, \ldots, v_n$, 使得对于所有的 i 和 $g \in G$ 来说, 有 $v_i g = v_{ig}$. 那么

$$V\left(\sum_{g\in G} g\right) = sp(v_1 + \ldots + v_n).$$

因此 V 有唯一的平凡 $\mathbb{C}G$-子模.

(2) 令 G 是 S_4 的子群, 并且由以下两个元素生成

$$a = (1234), \quad b = (12)(34).$$

那么 $G \cong D_8$(与例 1.5 相比较). 把 D_8 的不可约的特征标 $\chi_1, \ldots \chi_5$ 列在如下表中 (见例 16.3(3)):

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0

令 V 是 G 的置换模, 基是 v_1, v_2, v_3, v_4 并且对于所有的 i 和 $g \in G$ 来说, 有 $v_i g = v_{ig}$.

对于 $1 \leqslant i \leqslant 5$ 来说, 令

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{8} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) g.$$

例如, $e_5 = \dfrac{1}{2}(1 - a^2)$. 那么

$$\begin{aligned}
Ve_1 &= sp(v_1 + v_2 + v_3 + v_4), \\
Ve_2 &= 0, \\
Ve_3 &= 0, \\
Ve_4 &= sp\,(v_1 - v_2 + v_3 - v_4), \\
Ve_5 &= sp\,(v_1 - v_3, v_2 - v_4).
\end{aligned}$$

有

$$V = Ve_1 \oplus Ve_4 \oplus Ve_5,$$

所以把 V 表示成了不可约 $\mathbb{C}G$-子模的直和, 它们的特征标分别是 χ_1, χ_4, χ_5.

也可以验证

$$\begin{aligned}
&e_1 + \ldots + e_5 = 1, \\
&e_i^2 = e_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 5 \\
&e_i e_j = 0, \quad i \neq j.
\end{aligned}$$

把这些结果推论 14.9 相比较.

注意到 (14.27) 中描述的步骤在一般情况下并不能把一个给定的 $\mathbb{C}G$-模写成不可约 $\mathbb{C}G$-子模的直和 (因为 V_χ 在一般情况下不是不可约的).

第 14 章总结

1. 从 G 到 $\mathbb{C}$ 的两个函数 ϑ, ϕ 的内积是

$$\langle \vartheta, \phi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta(g)\overline{\phi(g)}.$$

2. G 的不可约特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 构成了一个标准正交基, 也就是说对于所有的 i, j 来说,

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

3. 每个 $\mathbb{C}G$-模是由它的特征标决定的.

4. 如果 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 是 G 的不可约特征标, 并且 ψ 是任意的特征标, 那么

$$\psi = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k,$$

其中 $d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$. 每个 d_i 是一个非负整数. 并且有 ψ 是不可约的当且仅当 $\langle \psi, \psi \rangle = 1$.

第 14 章习题

1. 令 $G = S_4$, 将会在第 18 章中看到 G 有两个特征标 χ 与 ψ, 它们在共轭类上的取值如下:

类代表元	(1)	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	4	3	8	4
χ	3	-1	0	3	-1
ψ	3	1	0	-1	-1

计算 $\langle \chi, \chi \rangle, \langle \chi, \psi \rangle$ 和 $\langle \psi, \psi \rangle$. 判断 χ 和 ψ 谁是不可约的?

2. 令 $G = Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, 令 ρ_1, ρ_2, ρ_3 是 G 在 $\mathbb{C}$ 上的表示, 其中

$$a\rho_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a\rho_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

证明 ρ_1 和 ρ_2 是等价的, 但是 ρ_3 不与 ρ_1 或 ρ_2 等价.

3. 假设 ρ 和 σ 是 G 的表示, 并且对于每个 $g \in G$ 存在一个可逆矩阵 T_g 使得 $g\sigma = T_g^{-1}(g\rho)T_g$. 证明存在一个可逆矩阵 T 使得对于所有的 $g \in G$ 有 $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$.

4. 假设 χ 是 G 的一个非零非平凡特征标, 并且对于所有的 $g \in G$ 来说 $\chi(g)$ 是一个非负实数. 证明 χ 是可约的.

5. 如果 χ 是 G 的一个特征标, 证明 $\langle \chi_{\text{reg}}, \chi \rangle = \chi(1)$.

6. 如果 π 是 S_n 的一个置换特征标, 证明 $\langle \pi, 1_{S_n} \rangle = 1$(提示: 读者可以发现习题 11.4 是相关的).

7. 令 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 是 G 的不可约特征标, 假设

$$\psi = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k$$

是 G 的一个特征标. 当 $\langle \psi, \psi \rangle = 1, 2, 3$ 或 4 时, 可以得到整数 d_i 的什么结论?

8. 假设 χ 是 G 的一个特征标, 并且对于所有的 $g \in G$ 来说, $\chi(g)$ 是一个偶数. 可以得到存在某个特征标 ϕ 使得 $\chi = 2\phi$ 这个结论吗?

第 15 章　不可约特征标的个数

本章将证明一个重要的定理: 有限群的不可约特征标的个数等于其共轭类的个数, 同时给出该定理的一些推论. 该定理与第 14 章中的结论相结合, 为寻找群的特征标提供了有效的方法, 这些方法在本书后面章节将会被频繁使用.

本章中均假定 G 是有限群.

类 函 数

15.1　定义

群 G 上的一个类函数为 $\psi: G \to \mathbb{C}$, 使得对于群 G 中的任意两个互相共轭的元素 x与y 都有 $\psi(x) = \psi(y)$(即 ψ 在共轭类上为一个常数).

由命题 13.5(2) 可知群 G 的特征标均为类函数. 群 G 上的类函数全体组成的集合 C 是从 G 到 $\mathbb{C}$ 的函数全体组成的向量空间的一个子空间, 且在一个共轭类上为 1, 而在其他共轭类上为 0 的函数全体形成了该子空间 C 的一组基. 因此, 若假设 l 为群 G 的共轭类的个数, 则

(15.2)
$$\dim C = l.$$

15.3　定理

群 G 的不可约特征标的个数等于群 G 的共轭类的个数.

证明　设 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 为群 G 的不可约特征标, 且令 l 为群 G 的共轭类的个数. 则根据定理 14.23, $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 在 C 中是线性无关的, 从而根据 (15.2) 可知 $k \leqslant l$.

为了证明 $l \leqslant k$, 考虑正则 $\mathbb{C}G$-模. 若 $V_1, \ldots, V_k$ 为一组互不同构的不可约 $\mathbb{C}G$-模的完全集, 则根据定理 8.7 可知

$$\mathbb{C}G = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k,$$

其中对于每一个 i, W_i 同构于 V_i 的一个直和, 由于 $\mathbb{C}G$ 包含单位元 1, 则有

$$1 = f_1 + \ldots + f_k,$$

其中对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant k$ 有 $f_i \in W_i$.

现在假设 $z \in Z(\mathbb{C}G)$, $\mathbb{C}G$ 的中心根据命题 9.14, 对于任意的 i 均存在一个 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ 使得对于所有的 $v \in V_i$ 有

$$vz = \lambda_i v.$$

因此对于所有的 $w \in W_i$ 有 $wz = \lambda_i w$, 特别地

$$f_i z = \lambda_i f_i \quad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

从而

$$z = 1z = (f_1 + \ldots + f_k)z = f_1 z + \ldots + f_k z = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k.$$

从而可知 $Z(\mathbb{C}G)$ 包含在 $\mathbb{C}G$ 的一个由 $f_1, \ldots, f_k$ 张成的子空间中. 根据命题 12.22, 由于 $Z(\mathbb{C}G)$ 的维数为 l, 从而 $l \leqslant k$, 则结论成立. 证毕.

15.4 推论

群 G 的不可约特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 形成了群 G 上的类函数全体构成的向量空间的一组基. 事实上, 若 ψ 为一个类函数, 则

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i,$$

其中对于所有的 $1 \leqslant i \leqslant k$ 有 $\lambda_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$.

证明 由于不可约特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 是线性无关的, 它们张成了 C 的一个维数为 k 的子空间, 由 (15.2) 可知 $\dim C = l$, 根据定理 15.3 知它等于 k, 因此 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 张成 $\mathbb{C}$, 所以 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 形成了 C 的一组基. 运用 (14.13) 可得推论的后半部分. 证毕.

推论 15.4 有下面有用的结果.

15.5 命题

假设 $g, h \in G$. 则 g 与 h 共轭当且仅当对于群 G 所有的特征标 χ 有 $\chi(g) = \chi(h)$.

证明 若 g 与 h 共轭, 则根据命题 13.5(2) 可知对于群 G 的所有特征标 χ 有 $\chi(g) = \chi(h)$.

反过来, 假设对于群 G 的所有特征标 χ 有 $\chi(g) = \chi(h)$, 则根据推论 15.4 可知对于群 G 的所有类函数 ψ 有 $\psi(g) = \psi(h)$. 特别地, 取 ψ 为在 g 所代表的共轭类上的值为 1, 而在其他地方的值为 0, 则 $\psi(g) = \psi(h) = 1$, 从而可知 g 与 h 共轭. 证毕.

15.6　推论

假设 $g \in G$. 则 g 与 g^{-1} 共轭当且仅当对于群 G 所有的特征标 χ 有 $\chi(g)$ 为实数.

证明　根据命题 13.9(3) 可知 $\chi(g)$ 为实数当且仅当 $\chi(g) = \chi(g^{-1})$, 从而根据命题 15.5 可以直接得出结论. 证毕.

在本章的结尾通过一个例子给出将一个群的特征标和类函数表示成不可约特征标的组合的实用方法. 跟前面的例子相同, 假设群 G 的特征标 χ 为一个行向量 k-元素是 χ 在 G 的第 k 个共轭类上的值.

15.7　例子

在 18.4 中将给出一个 12 阶群 G, 它有六个共轭类, 且其共轭类代表元为 $g_1, \ldots, g_6$(其中 $g_1 = 1$), 并且它有六个不可约特征标如下表所示:

g_i $\vert C_G(g_i)\vert$	g_1 12	g_2 12	g_3 6	g_4 6	g_5 4	g_6 4
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	i	$-i$
χ_3	1	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1	$-i$	i
χ_5	2	2	-1	-1	0	0
χ_6	2	-2	1	-1	0	0

假设已知群 G 的特征标 χ, ψ 如下表:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ	3	-3	0	0	i	$-i$
ψ	4	0	0	4	0	0

则易知

$$\chi = \chi_2 + \chi_6, \quad \psi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4.$$

例如 χ 所在行的第二个元素与第一个元素互为相反数, 从而根据群 G 的特征标表可知 χ 必为 χ_2, χ_4, χ_6 的线性组合, 最终可以快速得出结果.

事实上, 任意给定群 G 的一个特征标 ϕ, 如果它的次数与 χ_i 相比并不是特别大, 则可通过观察法来把 ϕ 表示为一个可约特征标的和的形式. 可以这样做是因为任意特征标关于不可约特征标的分解, 其系数均为非负整数, 且特征标表的第一列均为正整数 (事实上它们分别为 χ_i 的阶数).

对于群 G 的下面两个特征标 λ, μ, 我们建议读者用观察法来把它们表示成 $\chi_1, \ldots, \chi_6$ 的和的形式:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
λ	2	-2	-2	2	0	0
μ	4	4	1	1	0	0

然而对于一个类函数和较复杂的特征标, 如下面的 ϕ, 我们应该采用什么方法呢?

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
ϕ	11	3	-3	5	$-1+2i$	$-1-2i$

答案是运用内积的方法. 根据推论 15.4 我们知道

$$\phi = \lambda_1\chi_1 + \ldots + \lambda_6\chi_6$$

的系数 λ_i 为

$$\lambda_i = \langle \phi, \chi_i \rangle \quad (1 \leqslant i \leqslant 6).$$

运用命题 14.5(2), 可以计算出内积为

$$\langle \phi, \chi_1 \rangle = \frac{11 \cdot 1}{12} + \frac{3 \cdot 1}{12} + \frac{-3 \cdot 1}{6} + \frac{5 \cdot 1}{6} + \frac{(-1+2i) \cdot 1}{4} + \frac{(-1-2i) \cdot 1}{4} = 1,$$

运用同样的方法可以得到 $\langle \phi, \chi_2 \rangle = 3, \langle \phi, \chi_3 \rangle = 2, \langle \phi, \chi_4 \rangle = 1, \langle \phi, \chi_5 \rangle = 2, \langle \phi, \chi_6 \rangle = 0$. 从而

$$\phi = \chi_1 + 3\chi_2 + 2\chi_3 + \chi_4 + 2\chi_5.$$

第 15 章总结

1. 任意一个有限群的不可约特征标的个数等于该群的共轭类的个数.

2. 群 G 的不可约特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 构成了群 G 的类函数全体所形成的线性空间的一组基. 若 ψ 为一个类函数, 则 $\psi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i$, 其中 $\lambda_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$.

第 15 章习题

1. S_3 的三个不可约特征标为 χ_1, χ_2, χ_3:

	1	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

设 χ 为 S_3 的类函数, 且其取值情况如下:

	1	(12)	(123)
χ	19	-1	-2

请将 χ 表示为 χ_1, χ_2, χ_3 的线性组合, 并判断 χ 是否为 S_3 的一个特征标.

2. 假设 ψ_1, ψ_2, ψ_3 为群 S_3 的类函数, 且其取值如下:

	1	(12)	(123)
ψ_1	1	0	0
ψ_2	0	1	0
ψ_3	0	0	1

请将 ψ_1, ψ_2, ψ_3 表示为 S_3 的不可约特征标 χ_1, χ_2, χ_3 的线性组合的形式.

3. 假设群 G 为例 15.7 中给出的阶数为 12 的群, 且其共轭类代表元与不可约特征标分别为 $g_1, \ldots, g_6$ 和 $\chi_1, \ldots, \chi_6$. 假设 ψ 为群 G 的类函数且其取值如下:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
ψ	6	0	3	-3	$-1-i$	$-1+i$

请将 ψ 表示为 $\chi_1, \ldots, \chi_6$ 的线性组合, 并判断它是否为 G 的一个特征标.

4. 假设群 G 的阶数为 12.

(a) 证明群 G 不可能有 9 个共轭类 (提示: 证明 $Z(G)$ 的阶数不可能为 6).

(b) 运用习题 11.2 的结果证明 G 的共轭类个数为 4, 6 或者 12. 并找出满足相应条件的群 G.

第 16 章　特征标表与正交关系

有限群 G 的不可约特征标是类函数，且其数量等于 G 的共轭类的个数. 所以可以用一个方阵来方便地记录 G 的所有不可约特征标在 G 的共轭类上的值，这个方阵称为 G 的特征标表. 特征标表的元素之间存在着非常微妙的关系，这些关系中的相关一部分可以通过定理 16.4 中的正交关系来体现. 本书后面的章节中将致力于挖掘特征标表所隐含的信息. 之所以这样处理是因为定理 14.21 告诉我们，每一个 $\mathbb{C}G$-模都是由它的特征标决定的. 因此，表示论的一些问题通过考虑特征标就可以解决.

特 征 标 表

16.1　定义

令 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 为 G 的不可约特征标，$g_1, \ldots, g_k$ 为 G 的共轭类的代表元. ij-元为 $\chi_i(g_j)$(对任意的 i, j, 其中 $1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant k$) 的 $k \times k$ 矩阵称为 G 的特征标表.

通常给 G 的不可约特征标和共轭类标号，使得平凡特征标 $\chi_1 = 1_G$, G 的单位元 $g_1 = 1$. 除此之外，其他标号是任意的. 在特征标表中行指标为 G 的不可约特征标，列指标为它的共轭类 (或者说是共轭类代表元).

16.2　命题

G 的特征标表是一个可逆矩阵.

证明　因为 G 的不可约特征标是线性无关的，所以特征标表的行向量也是线性无关的 (定理 14.23)，所以矩阵可逆. 证毕.

16.3　例子

(1) 令 $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. G 的不可约特征标是在例 13.6(4) 中给出的. 取 $1, a, b$ 为 G 的共轭类代表元，那么 G 的特征标表为

	1	a	b
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

(2) 利用定理 9.8 可以写出任意有限交换群的特征标表. 例如, $C_2 = \langle a : a^2 = 1\rangle$ 的特征标表是

	1	a
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

$C_3 = \langle a : a^3 = 1\rangle$ 的特征标表是

	1	a	a^2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2
χ_3	1	ω^2	ω

(其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$).

(3) 令 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. 在习题 10.4 中读者可以找到 G 的所有不可约表示. G 的共轭类由 (12.12) 给出, 且其代表元为 $1, a^2, a, b, ab$. 因此 G 的特征标表为

	1	a^2	a	b	ab
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

第 18 章会给出所有二面体群的特征标表.

正 交 关 系

我们已经看到关系 (14.13),

$$\langle \chi_r, \chi_s \rangle = \delta_{rs},$$

在 G 的不可约特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 之间的一些用法. 这些关系式通过改写为

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs},$$

表示为特征标表的行向量的关系式 (参见命题 14.5(2)). 类似地也存在特征标表列向量关系式, 这由接下来的结论的第 (2) 部分给出.

16.4　定理

令 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 为 G 的不可约特征标, $g_1, \ldots, g_k$ 为 G 的共轭类的代表元. 那么下面的关系式对任意的 $r, s \in \{1, \ldots, k\}$ 成立.

(1) 行正交关系:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}.$$

(2) 列正交关系:

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|C_G(g_r)|.$$

证明　行正交关系前面已经证明了. 这里仅是与列正交关系对比出现.

对 $1 \leqslant s \leqslant k$, 令 ψ_s 为满足

$$\psi_s(g_r) = \delta_{rs} \quad (1 \leqslant r \leqslant k)$$

的类函数. 根据推论 15.4, ψ_s 是 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 的线性组合, 设为

$$\psi_s = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}).$$

我们知道 $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$, 所以

$$\lambda_i = \langle \psi_s, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)}.$$

若 g 与 g_s 共轭, 那么 $\psi_s(g) = 1$, 否则 $\psi_s(g) = 0$; 同时, 根据定理 12.8, G 中有 $|G|/|C_G(g_s)|$ 个元素与 g_s 共轭. 因此

$$\lambda_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in g_s^G} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_G(g_s)|}.$$

所以

$$\delta_{rs} = \psi_s(g_r) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i(g_r) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_G(g_s)|},$$

即列正交关系式成立. 证毕.

16.5　例子

下面举例验证列正交关系.

(1) 令 $G = D_6$. 由例 16.3(1) 已经知道 G 的特征标表, 这次在每个共轭类代表元 g_i 下记下中心化子 $C_G(g_i)$ 的阶:

g_i	1	a	b
$\|C_G(g_i)\|$	6	3	2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

对不同的情况考虑和 $\sum_{i=1}^{3}\chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)}$:

$$r=1,\quad s=2: 1\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot(-1)=0;$$
$$r=2,\quad s=2: 1\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)=3;$$
$$r=1,\quad s=3: 1\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 0=0.$$

在每种情形中, 取特征标表中的 r, s 列, 对应位置做乘积. 若 $r\neq s$, 乘积之和为 0, 若 $r=s$, 那么和为该列顶端的数 (也就是, g_r 的中心化子的阶).

(2) 假设给出 12 阶群 G 的特征标表的如下一部分, 其中 G 只有 4 个共轭类:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4
$\|C_G(g_i)\|$	12	4	3	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4				

(其中 $\omega=e^{2\pi i/3}$). 我们将用列正交关系来确定特征标表的最后一行.

特征标表的第一列元素是不可约特征标的次数, 所以它们都是正整数. 根据列正交关系, 其中 $r=s=1$, 这些数的平方和是 12(这也可由定理 11.12 得到). 因此第一列最后一个元素是 3.

记 x 为第二列最后一个数, 由列正交关系

$$\sum_{i=1}^{4}\chi_i(g_1)\overline{\chi_i(g_2)}=0$$

可得

$$1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+3\overline{x}=0.$$

所以 $x=-1$.

通过考虑第一列与第三、四列之间的正交关系, 可以得到如下的一个完整的特征标表:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	12	4	3	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

尽管我们的计算中只涉及与第一列的正交关系, 但正交关系在任意两列之间都成立. 比如

$$\sum_{i=1}^{4}\chi_i(g_2)\overline{\chi_i(g_2)}=1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)=4,$$
$$\sum_{i=1}^{4}\chi_i(g_3)\overline{\chi_i(g_3)}=1\cdot 1+\omega\cdot\overline{\omega}+\omega^2\cdot\overline{\omega}^2+0\cdot 0=3,$$
$$\sum_{i=1}^{4}\chi_i(g_3)\overline{\chi_i(g_4)}=1\cdot 1+\omega\cdot\overline{\omega}^2+\overline{\omega}\cdot\omega^2+0\cdot 0=0,$$

稍后将看到我们这里构造的特征标表是 A_4 的特征标表.

特征标表中涉及第一列的列正交关系在第 13 章中已经证明, 因为在定理 13.19 和命题 13.20 已经给出

$$\sum_{i=1}^{k}d_i\chi_i(g)=\begin{cases}|G|, & 若g=1,\\ 0, & 若g\neq 1,\end{cases}$$

其中 $d_i=\chi_i(1)$. 对方程两边取共轭, 有

$$\sum_{i=1}^{k}\chi_i(1)\overline{\chi_i(g)}=\begin{cases}|G|, & 若g=1,\\ 0, & 若g\neq 1,\end{cases}$$

这就是与第一列有关的列正交关系.

行与列的对应

注意到例 16.5(2) 中, 给出了 G 的 4 个不可约特征标中的 3 个, 我们利用列正交关系算出最后一个特征标的值. 另一个方法是利用行正交关系 $\langle\chi_i,\chi_4\rangle=\delta_{i4}$ 得到含 4 个未知量 $\chi_4(g_j)(1\leqslant j\leqslant 4)$ 的 4 个方程. 尽管列正交关系很容易操作, 实际上列正交关系含有和行正交关系相同的信息, 现在将说明这一点.

G 的特征标表是一个 $k\times k$ 矩阵, 我们调整这个矩阵中的值 $\chi_i(g_j)$ 得到另一个矩阵 M, 令 M 中的 ij-元为

$$\frac{\chi_i(g_j)}{|C_G(g_j)|^{1/2}},$$

记 $\overline{M^t}$ 为 M 的共轭转置.

现在由行正交关系可得, $M\overline{M^t}$ 上 r 行 s 列位置上元素是

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|}=\delta_{rs},$$

所以 $M\overline{M^t}=I$. 实际上, 方程 $M\overline{M^t}=I$ 是行正交关系的另一种表示方式. 另一方面, 由列正交关系可得, $\overline{M^t}M$ 上 r 行 s 列位置上元素是

$$\frac{1}{|C_G(g_r)|^{1/2}|C_G(g_s)|^{1/2}}\sum_{i=1}^{k}\overline{\chi_i(g_r)}\chi_i(g_s)=\delta_{rs},$$

所以 $\overline{M^t}M=I$.

由方阵 M 的性质可知 $M\overline{M^t}=I$ 和 $M\overline{M^t}=I$ 是相互等价的, 所以行正交关系与列正交关系是等价的.

利用上面的结论可以由行正交关系推出列正交关系. 更重要的是, 行正交关系与列正交关系包含相同的信息, 所以在计算特征标表时选择任一种正交关系都可以得到相同的结果.

第 16 章总结

令 G 为一个有限群, 不可约特征标为 $\chi_1,\ldots,\chi_k$, 共轭类代表元为 $g_1,\ldots,g_k$.

1. G 的特征标表是一个 $k\times k$ 的矩阵, 其中 ij-元是 $\chi_i(g_j)$.

2. 行正交关系是指对任意的 r,s, 有

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|}=\delta_{rs}.$$

3. 列正交关系是指对任意的 r,s, 有

$$\sum_{i=1}^{k}\chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)}=\delta_{rs}|C_G(g_r)|.$$

第 16 章习题

1. 写出 $C_2\times C_2$ 的特征标表.

2. 已知一个 8 阶群共有 5 个共轭类, 代表元分别是 $g_1,\ldots,g_5$, 且 4 个线性特征标 $\chi_1,\ldots,\chi_4$ 取值如下:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
$\|C_G(g_i)\|$	8	8	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1

写出 G 的完整特征标表.

3. 一个 10 阶的群 G, 恰有 4 个共轭类, 代表元分别是 $g_1,\ldots,g_4$, 且其不可约特征标 χ_1,χ_2 如下所示:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4
$\|C_G(g_i)\|$	10	5	5	2
χ_1	1	1	1	1
χ_2	2	α	β	0

其中 $\alpha=(-1+\sqrt{5})/2, \beta=(-1-\sqrt{5})/2$. 写出 G 的完整的特征标表.
(提示: 首先找到其余特征标在 g_1 上的值, 然后利用推论 13.10 找出在 g_4 上的值.)

4. 群 G 的特征标表的其中两列如下所示:

g_i	g_1	g_2
$\|C_G(g_i)\|$	21	7
χ_1	1	1
χ_2	1	1
χ_3	1	1
χ_4	3	ξ
χ_5	3	$\bar{\xi}$

其中 $g_1=1,\xi\in\mathbb{C}$.

(a) 求出 ξ.

(b) 求特征标表的另一列.

5. 令 $\chi_1,\ldots,\chi_k$ 是 G 的不可约特征标. 说明

$$Z(G)=\left\{g\in G:\sum_{i=1}^{k}\chi_i(g)\overline{\chi_i(g)}=|G|\right\}.$$

6. 令 G 是一个有限群, 其共轭类代表元为 $g_1,\ldots,g_k$, 特征标表是 C, 说明 $\det C$ 是实数或者纯虚数, 且

$$|\det C|^2=\prod_{i=1}^{k}|C_G(g_i)|.$$

并求 $G=C_3$ 时的 $\pm(\det C)$.

第 17 章　正规子群和提升特征标

如果 N 是有限群 G 的一个正规子群, 并且有 $N \neq \{1\}$, 那么商群 G/N 的阶比 G 的阶小. 因此, 求解 G/N 的特征标要比求解 G 的特征标容易. 事实上, 可以通过提升的方法, 由 G/N 的特征标得到 G 的一些特征标. 因此, 我们可以通过正规子群得到 G 的特征标. 相反地, 也可以通过 G 的特征标表来找 G 的正规子群. 特别地, 通过特征标表可以很容易地知道 G 是否是一个单群.

G 的线性特征标 (也就是次数为 1 的特征标) 是在 N 是 G 的一个导群的情况下, 通过提升 G/N 的不可约的特征标得到的 (导群在下面的定义 17.7 中给出). 而线性特征标, 反过来, 可以从一个给定的不可约的特征标得到一个新的不可约的特征标, 我们即将在下面的讨论中叙述这种方法.

提升特征标

我们从由 G/N 的一个特征标建立 G 的一个特征标开始说明.

17.1　命题

假设 $N \lhd G$, 令 $\widetilde{\chi}$ 是 G/N 的一个特征标. 如下定义 $\chi : G \to \mathbb{C}$

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(Ng) \quad (g \in G).$$

那么 χ 是 G 的一个特征标, 并且 χ 和 $\widetilde{\chi}$ 的次数相同.

证明　令 $\widetilde{\rho} : G/N \to GL(n, \mathbb{C})$ 是 G/N 的一个表示, 特征标是 $\widetilde{\chi}$. 函数 $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ 是由以下合成给出的:

$$g \mapsto Ng \mapsto (Ng)\widetilde{\rho} \quad (g \in G)$$

是一个从 G 到 $GL(n, \mathbb{C})$ 的同态. 因此 ρ 是 G 的一个表示. 对于所有的 $g \in G$, ρ 的特征标 χ 满足

$$\chi(g) = \operatorname{tr}(g\rho) = \operatorname{tr}((Ng)\widetilde{\rho}) = \widetilde{\chi}(Ng).$$

更进一步地, $\chi(1) = \widetilde{\chi}(N)$, 所以 χ 和 $\widetilde{\chi}$ 的次数相同. 证毕.

17.2 定义

如果 $N \lhd G$, 并且 $\widetilde{\chi}$ 是 G/N 的一个特征标, 那么如下给出的 G 的一个特征标 χ:

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(Ng) \quad (g \in G)$$

叫做 $\widetilde{\chi}$ 到 G 的提升.

17.3 定理

假设 $N \lhd G$. 如果把 G/N 的每个特征标和它到 G 的提升联系起来, 就得到了 G/N 的特征标组成的集合和满足 $N \leqslant \mathrm{Ker}\chi$ 的 G 的特征标 χ 组成的集合之间的一个一一对应关系. G/N 的不可约特征标对应 G 的核包含 N 的不可约特征标.

证明　如果 $\widetilde{\chi}$ 是 G/N 的一个特征标, χ 是 $\widetilde{\chi}$ 到 G 的提升, 那么 $\widetilde{\chi}(N) = \chi(1)$. 同时, 如果 $k \in N$, 那么

$$\chi(k) = \widetilde{\chi}(Nk) = \widetilde{\chi}(N) = \chi(1),$$

所以 $N \leqslant \mathrm{Ker}\chi$.

现在令 χ 是 G 的一个特征标并且有 $N \leqslant \mathrm{Ker}\chi$. 假设 $\rho: G \to GL(n, \mathbb{C})$ 是 G 的一个表示, 特征标是 χ. 如果 $g_1, g_2 \in G$ 并且 $Ng_1 = Ng_2$, 那么 $g_1g_2^{-1} \in N$, 所以 $(g_1g_2^{-1})\rho = I$, 因此 $g_1\rho = g_2\rho$. 故可以如下定义一个函数 $\widetilde{\rho}: G/N \to GL(n, \mathbb{C})$

$$(Ng)\widetilde{\rho} = g\rho \quad (g \in G).$$

那么对于所有的 $g, h \in G$ 有

$$((Ng)(Nh))\widetilde{\rho} = (Ngh)\widetilde{\rho} = (gh)\rho = (g\rho)(h\rho) = ((Ng)\widetilde{\rho})((Nh)\widetilde{\rho}),$$

所以 $\widetilde{\rho}$ 是 G/N 的一个表示. 如果 $\widetilde{\chi}$ 是 $\widetilde{\rho}$ 的特征标, 那么

$$\widetilde{\chi}(Ng) = \chi(g) \quad (g \in G).$$

因此 χ 是 $\widetilde{\chi}$ 的提升.

我们现在已经建立了 G/N 的每个特征标映射到它到 G 的提升的函数, 这个函数是 G/N 的特征标组成的集合到 G 的那些核包含 N 的特征标组成的集合之间的一个双射. 接下来只需证明不可约特征标对应着不可约特征标. 为了证明这个, 令 U 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个子空间, 并且注意到对于所有的 $u \in U$ 有

$$u(g\rho) \in U \Leftrightarrow u(Ng)\widetilde{\rho} \in U.$$

因此, U 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个 $\mathbb{C}G$-子模当且仅当 U 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个 $\mathbb{C}(G/N)$-子模. 因此表示 ρ 是不可约的当且仅当表示 $\widetilde{\rho}$ 是不可约的. 因此, χ 是不可约的当且仅当 $\widetilde{\chi}$ 是不可约的. 证毕.

对于 G 的某个正规子群 N 来说, 如果知道 G/N 的特征标表, 那么定理 17.3 可以让我们写出和 G/N 的不可约的特征标一样多的 G 的不可约的特征标.

17.4　例子

令 $G = S_4$, 并且有

$$N = V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

则有 $N \lhd G$(见例子 12.20). 如果令 $a = N(123), b = N(12)$, 那么

$$G/N = \langle a, b\rangle, \quad a^3 = b^2 = N, \quad b^{-1}ab = a^{-1},$$

所以 $G/N \cong D_6$. 从例 16.3(1) 中可以得到 G/N 的特征标表是

	N	$N(12)$	$N(123)$
$\widetilde{\chi}_1$	1	1	1
$\widetilde{\chi}_2$	1	-1	1
$\widetilde{\chi}_3$	2	0	-1

为了计算 G/N 的一个特征标 $\widetilde{\chi}$ 的提升 χ, 注意到

$$\chi((12)(34)) = \widetilde{\chi}(N) \quad (\text{由于}(12)(34) \in N),$$
$$\chi((1234)) = \widetilde{\chi}(N(13)) \quad (\text{由于}N(1234) = N(13)).$$

因此 $\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2, \widetilde{\chi}_3$ 的提升分别是 χ_1, χ_2, χ_3, 由下表给出:

	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0

那么 χ_1, χ_2, χ_3 是 G 的不可约的特征标, 因为 $\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2, \widetilde{\chi}_3$ 是 G/N 的不可约的特征标.

寻找正规子群

在下面的两个命题中, 我们将会看到特征标表包含了关于群的结构的信息. 首先证明怎么样在群 G 的特征标表已知的情况下找群 G 的所有的正规子群. 回忆我

们可以从特征标表轻松地找到一个不可约特征标 χ 的核, 因为

$$\mathrm{Ker}\chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}$$

(见定义 13.13). 同时 $\mathrm{Ker}\chi \lhd G$. 当然, 任何由不可约特征标的核的交构成的子群也是一个正规子群. 下面的命题说明了每个正规子群都是用这种方式得到的.

17.5　命题

如果 $N \lhd G$, 那么存在 G 的不可约的特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_s$ 使得

$$N = \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\chi_i.$$

证明　如果 g 属于 G 的每个不可约的特征标的核, 那么对于所有的特征标 χ 来说, 有 $\chi(g) = \chi(1)$, 所以由命题 15.5 有 $g = 1$. 因此, G 的所有的不可约的特征标的核的交是 $\{1\}$.

现在令 $\widetilde{\chi}_1, \ldots, \widetilde{\chi}_s$ 是 G/N 的不可约特征标, 由上面的说明有

$$\bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\widetilde{\chi}_i = \{N\}.$$

对于 $1 \leqslant i \leqslant s$ 来说, 令 χ_i 是 $\widetilde{\chi}_i$ 到 G 的提升. 如果 $g \in \mathrm{Ker}\chi_i$, 那么

$$\widetilde{\chi}_i(N) = \chi_i(1) = \chi_i(g) = \widetilde{\chi}_i(Ng),$$

所以 $Ng \in \mathrm{Ker}\widetilde{\chi}_i$. 因此如果 $g \in \cap\mathrm{Ker}\chi_i$, 那么 $Ng \in \cap\mathrm{Ker}\widetilde{\chi}_i = \{N\}$, 所以 $g \in N$. 因此

$$N = \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\chi_i.$$

证毕.

特别地, 由 G 的特征标表很容易判断 G 是否是一个单群.

17.6　命题

群 G 不是单群当且仅当存在 G 的非平凡的不可约特征标 χ 和 G 的非单位元 g 使得下式成立:

$$\chi(g) = \chi(1).$$

证明　假设存在一个非平凡的不可约特征标 χ 和非单位元 g 使得 $\chi(g) = \chi(1)$ 成立, 那么 $g \in \mathrm{Ker}\chi$, 所以 $\mathrm{Ker}\chi \neq \{1\}$. 如果 ρ 是 G 的特征标为 χ 的一个表示, 那么由定理 13.11(2) 得 $\mathrm{Ker}\chi = \mathrm{Ker}\rho$. 因为 χ 是非平凡的又是不可约的, $\mathrm{Ker}\rho \neq G$, 因此 $\mathrm{Ker}\chi \neq G$. 所以 $\mathrm{Ker}\chi$ 是 G 的一个不等于 $\{1\}$ 的正规子群, 所以 G 不是单群.

另一方面, 假设 G 不是单群, 所以存在一个 G 的一个不等于 $\{1\}$ 也不等于 G 的正规子群 N. 那么由命题 17.5 我们知道, 存在 G 的一个不可约特征标 χ 使得 $\mathrm{Ker}\chi$ 不是 $\{1\}$ 也不是 G. 因为 $\mathrm{Ker}\chi \neq G$, χ 是非平凡的, 令 $1 \neq g \in \mathrm{Ker}\chi$, 有 $\chi(g) = \chi(1)$. 证毕.

线性特征标

回忆一个群的线性特征标是次数为 1 的特征标. 因为建立特征标表的第一步通常是写出所有的线性特征标, 所以我们将要说明在给定任意一个群 G 的情况下如何找到它的所有的线性特征标. 而在这之前, 我们有必要研究 G 的导群, 导群的定义将在下面给出.

17.7　定义

对于一个群 G 来说, 令 G' 是由所有的形如 $g^{-1}h^{-1}gh(g, h \in G)$ 的元素生成的 G 的子群. 那么 G' 叫做 G 的导群.

把 $g^{-1}h^{-1}gh$ 简记为 $[g, h]$. 因此, $G' = \langle [g, h] : g, h \in G \rangle$.

17.8　例子

(1) 如果 G 是交换群, 那么对于所有的 $g, h \in G$ 来说, 有 $[g, h] = 1$, 所以 $G' = \{1\}$.

(2) 令 $G = S_3$. 很显然 $[g, h]$ 是一个偶置换, 所以 $G' \leqslant A_3$. 如果 $g = (12), h = (23)$, 那么 $[g, h] = (123)$. 因此 $G' = \langle (123) \rangle = A_3$.

我们将要证明 $G' \lhd G$ 并且 G 的线性特征标是 G'/G 的不可约的特征标到 G 的提升. 证明过程中会用到下面这个命题.

17.9　命题

如果 χ 是 G 的一个线性特征标, 那么 $G' \leqslant \mathrm{Ker}\chi$.

证明　令 χ 是 G 的一个线性特征标. 那么 χ 是从 G 到非零复数组成的乘法群的一个同态. 因此, 对于所有的 $g, h \in G$, 有 $\chi(g^{-1}h^{-1}gh) = \chi(g)^{-1}\chi(h)^{-1}\chi(g)\chi(h) = 1$. 因此有 $G' \leqslant \mathrm{Ker}\chi$. 证毕.

下面研究导群的一些群的理论性质.

17.10　命题

假设 $N \lhd G, G'$ 为 G 的导群, 那么

(1) $G' \lhd G$.

(2) $G' \leqslant N$ 当且仅当 G/N 是交换群. 特别地, G/G' 是交换群.

证明 (1) 注意到对于所有的 $a, b, x \in G$, 有

$$x^{-1}(ab)x = (x^{-1}ax)(x^{-1}bx),$$

$$x^{-1}a^{-1}x = (x^{-1}ax)^{-1}.$$

现在 G' 包含形如 $[g,h]$ 的元素的积和它们的逆. 因此, 为了证明 $G' \lhd G$, 只需要证明对于所有的 $g, h, x \in G$, 有 $x^{-1}[g,h]x \in G'$. 因为

$$\begin{aligned} x^{-1}[g,h]x &= x^{-1}g^{-1}h^{-1}ghx \\ &= (x^{-1}gx)^{-1}(x^{-1}hx)^{-1}(x^{-1}gx)(x^{-1}hx) \\ &= [x^{-1}gx, x^{-1}hx]. \end{aligned}$$

因此, $G' \leqslant G$.

(2) 令 $g, h \in G$. 有

$$ghg^{-1}h^{-1} \in N \Leftrightarrow Ngh = Nhg \Leftrightarrow (Ng)(Nh) = (Nh)(Ng).$$

因此, $G' \leqslant N$ 当且仅当 G/N 是交换群. 因为已经证明过 $G' \lhd G$, 所以有 G/G' 是交换群. 证毕.

由命题 17.10 我们知道 G' 是使得 G/N 是交换群的正规子群 N 中最小的正规子群.

给定一个导群 G', 可以应用下面的定理得到 G 的所有的线性特征标.

17.11 定理

G 的线性特征标就是那些由 G/G' 的不可约的特征标到 G 的提升. 特别地, G 的不同的线性特征标的数量等于 G/G' 的阶数, 所以整除 G 的阶数.

证明 令 $m = |G/G'|$. 因为 G/G' 是交换群, 定理 9.8 告诉我们 G/G' 有且仅有 m 个不可约的特征标 $\widetilde{\chi}_1, \ldots, \widetilde{\chi}_m$, 这些特征标的次数都是 1. 这些特征标到 G 的的提升 $\chi_1, \ldots, \chi_m$ 的次数也是 1, 并且由定理 17.3 我们知道它们恰恰就是使 $G' \leqslant \mathrm{Ker}\chi$ 成立的 G 的不可约的特征标 χ. 由命题 17.9, 特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_m$ 就是 G 的所有的线性特征标. 证毕.

17.12 例子

令 $G = S_n$. 证明 $G' = A_n$. 如果 $n = 1$ 或 $n = 2$, 那么 S_n 是交换群, 所以 $G' = \{1\} = A_n$. 我们在例 17.8(2) 中已经证明了 $S_3' = A_3$, 所以假设 $n \geqslant 4$.

因为 $S_n/A_n \cong C_2$, 由命题 17.10(2) 有 $G' \leqslant A_n$. 如果 $g = (12), h = (23), k = (12)(34)$, 那么

$$[g,h] = (123), \quad [h,k] = (14)(23).$$

因为 $G' \lhd G$, 所以 $(123)^G$ 和 $(14)(23)^G$ 中所有的元素都属于 G'. 因此, 应用定理 12.15, G' 包含所有的 3- 轮换型和所有的 (2,2)- 轮换型. 又因为任意两个对换的积是单位元或者 3- 轮换型或者 (2,2)- 轮换型, 并且 A_n 包含着所有的可以分解成偶数个对换的积的置换. 所以 $A_n \leqslant G'$. 我们证明出了 $G' = A_n$.

17.13　例子

我们来找 S_n 的线性特征标 $(n \geqslant 2)$. 从上一个例子我们知道 $S_n' = A_n$. 因为 $S_n/S_n' = \{A_n, A_n(12)\} \cong C_2$, 群 S_n/S_n' 有两个线性特征标 $\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2$, 其中

$$\widetilde{\chi}_1(A_n(12)) = 1,$$

$$\widetilde{\chi}_2(A_n(12)) = -1.$$

因此由定理 17.11, S_n 有且仅有两个线性特征标 χ_1, χ_2, 其中

$$\chi_1 = 1_{S_n},$$

$$\chi_2(g) = \begin{cases} 1, & g \in A_n, \\ -1, & g \notin A_n. \end{cases}$$

G 的线性特征标不仅作为不可约特征标来说很重要, 它们也在从已有的特征标中建立新的不可约的特征标中发挥着重要的作用, 下面这个结果就可以很好地说明.

17.14　命题

假设 χ 是 G 的一个特征标, λ 是 G 的一个线性特征标. 那么如下定义的积 $\chi\lambda$

$$\chi\lambda(g) = \chi(g)\lambda(g) \quad (g \in G)$$

是 G 的一个特征标. 更近一步地, 如果 χ 是不可约的, 那么 $\chi\lambda$ 也是不可约的.

证明　令 $\rho: G \to GL(n, \mathbb{C})$ 是特征标为 χ 的一个表示. 如下定义 $\rho\lambda: G \to GL(n, \mathbb{C})$

$$g(\rho\lambda) = \lambda(g)(g\rho) \quad (g \in G).$$

因此 $g(\rho\lambda)$ 是复数 $\lambda(g)$ 乘上矩阵 $g\rho$. 因为 ρ 和 λ 是同态, 我们很容易地知道 $\rho\lambda$ 也是一个同态. 矩阵 $g(\rho\lambda)$ 的迹是 $\lambda(g)\mathrm{tr}(g\rho)$, 也就是 $\lambda(g)\chi(g)$. 因此 $\rho\lambda$ 是特征标为 $\chi\lambda$ 的 G 的一个表示.

现在对于所有的 $g \in G$, 复数 $\lambda(g)$ 是一个单位根, 所以 $\lambda(g)\overline{\lambda(g)} = 1$. 因此

$$\begin{aligned}\langle \chi\lambda, \chi\lambda \rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi(g)\lambda(g)\overline{\chi(g)\lambda(g)} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = \langle \chi, \chi \rangle.\end{aligned}$$

由定理 14.20 我们知道 $\chi\lambda$ 不可约当且仅当 χ 不可约. 证毕.

两个特征标的积的一般情况将在第 19 章中讨论.

第 17 章总结

1. G/N 的特征标对应着使得 $N \leqslant \mathrm{Ker}\chi$ 成立的 G 的特征标 χ. 对应着 G/N 的特征标 $\widetilde{\chi}$ 的 G 的特征标是 $\widetilde{\chi}$ 的提升, 并且由如下式子给出:

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(Ng) \quad (g \in G).$$

2. G 的正规子群可以由 G 的特征标表来得到.

3. G 的线性特征标就是那些 G/G' 的不可约的特征标到 G 的提升.

第 17 章习题

1. 令 $G = Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$.

(a) 找出 G 的 5 个共轭类.

(b) 求出 G', 建立 G 的所有的线性特征标.

(c) 做出 G 的特征标表.

把这个特征标表和例 16.3(3) 中的 D_8 的特征标表作比较.

2. 令 a 和 b 是 S_7 中如下的置换:

$$a = (1234567), \quad b = (235)(476).$$

令 $G = \langle a, b\rangle$. 验证

$$a^7 = b^3 = 1, \quad b^{-1}ab = a^2.$$

(a) 证明 G 的阶是 21.

(b) 找出 G 的所有的共轭类.

(c) 做出 G 的特征标表.

3. 证明每个 12 阶的群有 3,4 或者 12 个线性特征标, 因此, 这个群不是单群.

4. 某个 12 阶的群 G 有 6 个共轭类, 代表元分别是 $g_1, \ldots, g_6$(其中 $g_1 = 1$), 并且有如下值的两个不可约特征标 χ, ϕ:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ	1	$-i$	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2

运用命题 17.14 完成 G 的特征标表. 求出 G 的所有的共轭类的大小.

5. D_8 的特征标表如下表给出 (见例 16.3(3)):

	1	a^2	a, a^3	b, a^2b	ab, a^3b
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

把 D_8 的每个正规子群表示成不可约特征标的核的交集, 就像命题 17.5 中的形式一样.

6. 给定群

$$T_{4n} = \langle a, b : a^{2n} = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

的阶是 $4n$(T_{4n} 被称为双环群).

(a) 证明如果 ε 是复数域中的 $2n$ 次单位根, 那么存在一个 T_{4n} 在 $\mathbb{C}$ 上的表示

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^n & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) 求出 T_{4n} 的所有的不可约的表示.

7. 对于 $n \geqslant 1$, 群

$$U_{6n} = \langle a, b : a^{2n} = b^3 = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$$

的阶是 $6n$.

(a) 令 $\omega = e^{2\pi i/3}$. 证明如果 ε 是复数域中的 $2n$ 次单位根, 那么存在一个 U_{6n} 在 $\mathbb{C}$ 上的表示

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

(b) 求出 U_{6n} 的所有的不可约的表示.

8. 令 n 是一个奇正整数. 群

$$V_{8n} = \langle a, b : a^{2n} = b^4 = 1, ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b \rangle$$

的阶是 $8n$.

(a) 证明如果 ε 是复数域中的 n 次单位根, 那么存在一个 V_{8n} 在 $\mathbb{C}$ 上的表示

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) 求出 V_{8n} 的所有的不可约的表示.

第 18 章　一些基本的特征标表

现在我们运用已经掌握的方法来构造几个群的特征标表, 它们包括 S_4, A_4 以及所有的二面体群.

18.1　群 S_4

在例 17.4 中, 我们通过对商群 S_4/V_4 的特征标的提升, 得到了 S_4 的三个不可约特征标 χ_1, χ_2, χ_3. 现在运用命题 17.14, 通过将一个特征标与一个线性特征标相乘来完成 S_4 的特征标表.

假设特征标 χ_4 为

$$\chi_4(g) = |\text{fix}(g)| - 1 \quad (g \in S_4)$$

就是命题 13.24 中给出的特征标. 根据命题 17.14, 乘积 $\chi_4\chi_2$ 也是 S_4 的一个特征标. 特征标 $\chi_2, \chi_4, \chi_4\chi_2$ 的值为

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
$\|C_G(g_i)\|$	24	4	3	8	4
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_4	3	1	0	-1	-1
$\chi_4\chi_2$	3	-1	0	-1	1

由于

$$\langle \chi_4, \chi_4 \rangle = \frac{9}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 1,$$

因此 χ_4 是不可约的. 仅用相同方法计算或运用命题 17.14, 知 $\chi_4\chi_2$ 也是不可约的, 令 $\chi_5 = \chi_4\chi_2$. 由于 S_4 共有五个共轭类, 并且我们已经找到了五个不可约特征标, 从而可得到 S_4 的特征标表, 如下:

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
$\|C_G(g_i)\|$	24	4	3	8	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

18.2　群 A_4

假设 $G = A_4$. 则 $|G| = 12$, 且群 G 共有四个共轭类, 它们的代表元分别为

$$1, (12)(34), (123), (132). \text{ (见例12.18(1))}$$

假设 v 为命题 13.24 中给出的 A_4 的特征标, 则对所有的 $g \in A_4$, 有 $v(g) = |\text{fix}(g)| - 1$. 则 v 的值为

g_i	1	(12)(34)	(123)	(132)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	12	4	3	3
v	3	-1	0	0

由于

$$\langle v, v\rangle = \frac{9}{12} + \frac{1}{4} = 1,$$

故 v 为 G 的一个次数为 3 的不可约特征标.

由于 G 共有四个不可约特征标, 且它们的次数的平方和为 12, 它必然有三个线性特征标. 由定理 17.11 有 $|G/G'| = 3$. 不难看出

$$G' = V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

则 $G/G' = \{G', G'(123), G'(132)\} \cong C_3$, 且 G/G' 的特征标表为 (其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$)

	G'	$G'(123)$	$G'(132)$
$\widetilde{\chi}_1$	1	1	1
$\widetilde{\chi}_2$	1	ω	ω^2
$\widetilde{\chi}_3$	1	ω^2	ω

$\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2, \widetilde{\chi}_3$ 在群 G 上的提升再加上 $\chi_4 = v$ 构成了 A_4 的所有不可约特征标, 从而它的特征标表为

g_i	1	(12)(34)	(123)	(132)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	12	4	3	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

18.3 二面体群

假设群 G 为阶数为 $2n$ 的二面体群 D_{2n}, 且 $n \geqslant 3$, 则 $G = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. 现在求群 G 的特征标表.

记 $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$. 对于任意的正整数 j 满足 $1 \leqslant j < n/2$, 定义

$$A_j = \begin{pmatrix} \varepsilon^j & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-j} \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

验证可得

$$A_j^n = B_j^2 = I, \quad B_j^{-1} A_j B_j = A_j^{-1}.$$

通过定义 $\rho_j : G \to GL(2, \mathbb{C})$ 为

$$(a^r b^s)\rho_j = (A_j)^r (B_j)^s \quad (r, s \in \mathbb{Z}),$$

则对于任意的正整数 j 满足 $1 \leqslant j < n/2$, 我们可以得到群 G 的一个表示. 根据例子 5.5(2) 或习题 8.4 的结果可知 ρ_j 为一个不可约表示. 如果 i 和 j 是不同的整数, 并且 $1 \leqslant i < n/2, 1 \leqslant j < n/2$, 则 $\varepsilon^i \neq \varepsilon^j$ 且 $\varepsilon^i \neq \varepsilon^{-j}$, 因此 $a\rho_i$ 与 $a\rho_j$ 具有不同的特征值. 从而不存在矩阵 T, 使 $a\rho_i = T^{-1}(a\rho_j)T$, 因此 ρ_i 与 ρ_j 不等价.

假设 ψ_j 为 ρ_j 的特征标. 从而我们构造出了群 G 的互不相同的特征标 ψ_j, 其中 j 满足 $1 \leqslant j < n/2$. 为了叙述的方便, 将对 n 分奇偶进行讨论.

(1) n 奇数

根据 (12.11),D_{2n}(n 为奇数) 的共轭类为

$$\{1\}, \quad \{a^r, a^{-r}\} \quad (1 \leqslant r \leqslant (n-1)/2), \quad \{a^s b : 0 \leqslant s \leqslant n-1\}.$$

从而可知它共有 $(n+3)/2$ 个共轭类. 其中

$$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{(n-1)/2}$$

是它的 $(n-1)/2$ 个次数为 2 的不可约特征标. 由于群 G 共有 $(n+3)/2$ 个不可约特征标, 故还需要寻找它的另外两个不可约特征标.

由于 $\langle a \rangle \lhd G$ 且 $G/\langle a \rangle \cong C_2$, 故通过对 $G/\langle a \rangle$ 的不可约特征标的提升得到群 G 的两个线性特征标 χ_1, χ_2. 提升得结果为 $\chi_1 = 1_G$ 且

$$\chi_2(g) = \begin{cases} 1, & \text{若存在 } r \text{ 有 } g = a^r, \\ -1, & \text{若存在 } r \text{ 有 } g = a^r b. \end{cases}$$

至此我们找到了 D_{2n}(n 为奇数) 的所有不可约特征标 (捎带利用定理 17.11 我们证明了 $D_{2n} =< a >$(n 为奇数)).

D_{2n}(n 为奇数) 的特征标表为 (其中 $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$)

g_i	1	$a^r (1 \leqslant r \leqslant (n-1)/2)$	b
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	$2n$	n	2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
ψ_j $(1 \leqslant j \leqslant (n-1)/2)$	2	$\varepsilon^{jr} + \varepsilon^{-rj}$	0

(2) n 为偶数

若 n 为偶数, 记 $n = 2m$, 则根据 (12.12), D_{2n} 的共轭类为

$$\{1\}, \quad \{a^m\}, \quad \{a^r, a^{-r}\} \quad (1 \leqslant r \leqslant m-1), \quad \{a^s b : s\text{为偶数}\}, \quad \{a^s b : s\text{为奇数}\}.$$

因此 G 共有 $m+3$ 个不可约特征标, 由前面的论述可知, 其中的 $m-1$ 个为

$$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{m-1}.$$

为了得到余下的四个不可约特征标, 首先注意到 $\langle a^2\rangle = \{a^j : j\text{为偶数}\}$ 是群 G 的一个正规子群且

$$G/\langle a^2\rangle = \{\langle a^2\rangle, \langle a^2\rangle a, \langle a^2\rangle b, \langle a^2\rangle ab, \} \cong C_2 \times C_2.$$

因此 G 有四个线性特征标 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 (G' =< a^2 >)$. 并且由于这些线性特征标是通过对 $G/\langle a^2\rangle$ 的不可约特征标提升得到, 所以它们的值也是容易计算的, 从而得到了 D_{2n}(n 为偶数) 的特征标表(其中 $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$)

g_i	1	a^m	$a^r (1 \leqslant r \leqslant m-1)$	b	ab
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	$2n$	$2n$	n	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	$(-1)^m$	$(-1)^r$	1	-1
χ_4	1	$(-1)^m$	$(-1)^r$	-1	1
ψ_j $(1 \leqslant j \leqslant m-1)$	2	$2(-1)^j$	$\varepsilon^{jr} + \varepsilon^{-jr}$	0	0

18.4　另一个阶数为 12 的群

现在刻画一个阶数为 12 但不同构于 A_4 或者D_{12} 的非交换群 G, 并构造它的特征标表. 事实上, 阶数为 12 的非交换群只有 A_4, D_{12} 与 G, 但是这里并不证明这一结果.

设 a, b 是 S_{12} 中的置换, 其中

$$a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12),$$

$$b = (1\ 7\ 4\ 10)(2\ 12\ 5\ 9)(3\ 11\ 6\ 8),$$

令 $G = \langle a, b\rangle$ 为 S_{12} 的子群. 由于 a 的阶数为 6 且 $b \notin \langle a\rangle$, 从而群 G 中至少含有 12 个元素, 即

$$a^r, \quad a^r b \quad (0 \leqslant r \leqslant 5).$$

经过验证可知 a, b 满足

$$a^6 = 1, \quad a^3 = b^2, \quad b^{-1}ab = a^{-1}.$$

进而可知群 G 中的每一个元素均可以表示为 $a^r b^s (0 \leqslant r \leqslant 5, 0 \leqslant s \leqslant 1)$ 的形式. 因此 $|G| = 12$.

通过对 a, b 间关系的分析可知

$$C_G(a) = \langle a\rangle, \quad C_G(a^3) = G, \quad C_G(b) = \{1, a^3, b, a^3 b\}.$$

从而可知群 G 的共轭类如下表:

共轭类	代表元g_i	$\lvert C_G(g_i)\rvert$
$\{1\}$	1	12
$\{a^3\}$	a^3	12
$\{a, a^{-1}\}$	a	6
$\{a^2, a^{-2}\}$	a^2	6
$\{b, a^2 b, a^4 b\}$	b	4
$\{ab, a^3 b, a^5 b\}$	ab	4

因此 G 共有六个不可约特征标. 由于 $\langle a^2\rangle = \{1, a^2, a^4\} \lhd G$, 且

$$G/\langle a^2\rangle = \{\langle a^2\rangle, \langle a^2\rangle a, \langle a^2\rangle b, \langle a^2\rangle ab\},$$

从而根据 $\langle a^2\rangle a = \langle a^2\rangle b^2$, 可得 $G/\langle a^2\rangle \cong C_4$. 通过对 C_4 的不可约特征标进行提升, 可以得到 G 的四个线性特征标 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ 如下表:

g_i	1	a^3	a	a^2	b	ab
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	12	12	6	6	4	4
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	i	$-i$
χ_3	1	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1	$-i$	i
χ_5	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
χ_6	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6

下面需要确定群 G 的最后两个不可约特征标 χ_5, χ_6 的值 α_r, β_r. 为此, 运用定理 16.4(2) 中的列正交关系.

由于 α_1, β_1 是特征标 χ_5, χ_6 的次数, 故它们均为正整数; 由于 a^3 的阶数为 2, 故根据推论 13.10 可知 α_2, β_2 为整数. 对第一列和第二列运用列正交关系可得

$$4 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 12,$$

$$4 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 12,$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0.$$

由于 α_1, β_1 为正整数, 所以根据第一个方程可得 $\alpha_1 = \beta_1 = 2$. 根据另外两个方程可得 $\alpha_2 = -\beta_2 = \pm 2$. 不妨假设 $\alpha_2 = 2, \beta_2 = -2$.

当 $r > 2$ 时, 根据列正交关系可知

$$\sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_1)} = 0,$$

且

$$\sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_2)} = 0.$$

从而我们得到了关于 $2\alpha_r + 2\beta_r$ 与 $2\alpha_r - 2\beta_r$ 的一组方程:

$$r = 3: \ 2\alpha_3 + 2\beta_3 = 0, 4 + 2\alpha_3 - 2\beta_3 = 0;$$

$$r = 4: \ 4 + 2\alpha_4 + 2\beta_4 = 0, 2\alpha_4 - 2\beta_4 = 0;$$

$$r = 5: \ 2\alpha_5 + 2\beta_5 = 0, 2\alpha_5 - 2\beta_5 = 0;$$

$$r = 6: \ 2\alpha_6 + 2\beta_6 = 0, 2\alpha_6 - 2\beta_6 = 0.$$

因此

$$\alpha_3 = -1, \quad \beta_3 = 1,$$

$$\alpha_4 = -1, \quad \beta_4 = -1,$$

$$\alpha_5 = 0, \quad \beta_5 = 0,$$

$$\alpha_6 = 0, \quad \beta_6 = 0.$$

从而群 G 完整的特征标表为

g_i	1	a^3	a	a^2	b	ab
$\|C_G(g_i)\|$	12	12	6	6	4	4
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	i	$-i$
χ_3	1	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1	$-i$	i
χ_5	2	2	-1	-1	0	0
χ_6	2	-2	1	-1	0	0

由于群 G 的特征标表与 A_4 或者 D_{12} 的特征标表不同, 故可知它与 A_4 或者 D_{12} 都不同构.

需要指出的是我们是通过列正交关系, 而不是通过构造相应的 $\mathbb{C}G$-模来得到特征标表中最后两个特征标的值的, 这样的处理方法是较好的. 因为在通常情况下, 构造一个不可约特征标往往要比构造一个不可约表示要简单 (事实上, 构造 χ_5, χ_6 所对应的表示也不困难, 参见习题 17.6).

第 18 章总结

在本章给出了下面一些群的特征标表.

1. 18.1 节: 群 S_4.
2. 18.2 节: 群 A_4.
3. 18.3 节: 二面体群.

第 18 章习题

1. 将 D_8 看做是 S_4 的一个子群, 则根据例 1.1(3), 它相当于正方形的 4 个角之间的置换. 令 π 为 D_8 的置换特征标. 试确定 π 的值, 并将它分解成不可约特征标的和.

2. 写出 D_{12} 的特征标表, 由此说明其特征标表中的元素均为整数.
根据 D_{12} 的特征标表寻找它的七个不同的正规子群 (提示: 运用命题 17.5).

3. 假设 $G = T_{4n} = \langle a, b : a^{2n} = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$.确定 G 的特征标表 (提示: 运用习题 17.6 的结果, 注意对 n 分奇偶考虑).

4. 假设 $G = U_{6n} = \langle a, b : a^{2n} = b^3 = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$, 如习题 17.7 所示. 确定 G 的特征标表.

5. 假设 $G = V_{8n} = \langle a, b : a^{2n} = b^4 = 1, ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b \rangle$, 其中 n 是奇数, 如习题 17.8 所示. 确定 G 的特征标表.

第19章 张 量 积

第 17 章的最后用 G 中一个线性特征标乘 G 中一个特征标从而得到 G 的一个新的特征标, 这个方法可以扩展为任意一对特征标 χ 和 ψ 的乘积. 乘积 $\chi\psi$ 在 G 中元素 g 上的值为 $\chi(g)\psi(g)$. 所以直接计算积即可, 但是巧妙之处是乘积 $\chi\psi$ 是 G 的一个特征标. 方法是取特征标分别为 χ 和 ψ 的 $\mathbb{C}G$-模 V 和 W, 使得它们能形成一个新的特征标为 $\chi\psi$ 的 $\mathbb{C}G$-模, 称为 V 和 W 的张量积.

当 $\chi=\psi$ 时, 考虑特征标 χ^2, 更一般地, χ^3,χ^4 等. 如果 χ 不是线性的, 那么 $\chi,\chi^2,\ldots$ 的次数依次递增, 并且通过对 χ 取幂次可以得到任意多的新的特征标. 那么仅从 G 的一个非线性特征标就可以获得 G 的特征标表的一大部分. 的确, 特征标的积让一个给定的特征标成为我们获得新特征标的来源, 最后我们通过创建 S_5 和 S_6 的特征标表来说明这一点.

在本章的最后, 对给定的有限群 G 和 H, 我们利用张量积找到直积 $G\times H$ 的所有不可约特征标.

张量积空间

设 V 和 W 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间, 基分别为 $v_1,\ldots,v_m$ 和 $w_1,\ldots,w_n$. 对任意的 i,j 其中 $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$, 引进符号 $v_i\otimes w_j$. 张量积空间 $V\otimes W$ 定义为 $\mathbb{C}$ 上由一组基

$$\{v_i\otimes w_j : 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n\}$$

给定的 mn-维向量空间. 这样 $V\otimes W$ 中包含了所有形为 $\sum\limits_{i,j}\lambda_{ij}(v_i\otimes w_j)(\lambda_{ij}\in\mathbb{C})$ 的向量.

对于 $v\in V, w\in W$ 有 $v=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i v_i$ 和 $w=\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j w_j(\lambda_i,\mu_j\in\mathbb{C})$, 定义 $v\otimes w\in V\otimes W$ 为

$$v\otimes w=\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j(v_i\otimes w_j).$$

例如,

$$(2v_1-v_2)\otimes(w_1+w_2)=2v_1\otimes w_1+2v_1\otimes w_2-v_2\otimes w_1-v_2\otimes w_2.$$

不要误以为 $V\otimes W$ 中的每一个元素都有 $v\otimes w$ 这种形式. 例如,

$$v_1\otimes w_1+v_2\otimes w_2$$

就不能表示成形式 $v\otimes w$.

19.1　命题

(1) 如果 $v\in V, w\in W, \lambda\in\mathbb{C}$, 那么

$$v\otimes(\lambda w)=(\lambda v)\otimes w=\lambda(v\otimes w).$$

(2) 如果 $x_1,\ldots,x_a\in V, y_1,\ldots,y_b\in W$, 那么

$$\left(\sum_{i=1}^{a}x_i\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{b}y_j\right)=\sum_{i,j}x_i\otimes y_j.$$

证明　(1) 令 $v=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i v_i, w=\sum_{j=1}^{n}\mu_j w_j$. 那么

$$v\otimes(\lambda w)=\left(\sum_i\lambda_i v_i\right)\otimes\left(\sum_j\lambda\mu_j w_j\right)=\sum_{i,j}\lambda\lambda_i\mu_j(v_i\otimes w_j),$$

$$(\lambda v)\otimes w=\left(\sum_i\lambda\lambda_i v_i\right)\otimes\left(\sum_j\mu_j w_j\right)=\sum_{i,j}\lambda\lambda_i\mu_j(v_i\otimes w_j),$$

$$\lambda(v\otimes w)=\lambda\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j(v_i\otimes w_j)=\sum_{i,j}\lambda\lambda_i\mu_j(v_i\otimes w_j).$$

所以 $v\otimes(\lambda w)=(\lambda v)\otimes w=\lambda(v\otimes w)$.

第二部分的证明非常容易, 我们就将它留为练习. 证毕.

这里 $V\otimes W$ 的构造依赖于所选取的 V 和 W 的一组基; 接下来的命题将会说明选取 V 和 W 其他基所形成的张量空间是一样的.

19.2　命题

若 $e_1,\ldots,e_m$ 是 V 的一组基, $f_1,\ldots,f_n$ 是 W 的一组基, 那么

$$\{e_i\otimes f_j:1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$$

中的元素组成 $V\otimes W$ 的一组基.

证明　记

$$v_i=\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}e_k,\quad w_j=\sum_{l=1}^{n}\mu_{jl}f_l\quad(\lambda_{ik},\mu_{jl}\in\mathbb{C}).$$

那么根据命题 19.1, 有

$$v_i \otimes w_j = \sum_{k,l} \lambda_{ik}\mu_{jl}(e_k \otimes f_l).$$

现在元素 $v_i \otimes w_j (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$ 是 $V \otimes W$ 的一组基, 因此 mn 个元素 $e_k \otimes f_l (1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant l \leqslant n)$ 张成 $V \otimes W$. 因为 $V \otimes W$ 的维数为 mn, 所以 $e_k \otimes f_l$ 也是 $V \otimes W$ 的一组基. 证毕.

张量积模

我们已经引入了两个向量空间的张量积, 现在定义两个 $\mathbb{C}G$-模的张量积.

设 G 是一个有限群, V 和 W 是基分别为 $v_1, \ldots, v_m$ 和 $w_1, \ldots, w_n$ 的 $\mathbb{C}G$-模. 我们知道

$$v_i \otimes w_j \quad (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$$

给出 $V \otimes W$ 的一组基.$v_i \otimes w_j$ 与 G 中一个元素的乘法定义如下, 这个乘法定义可以线性扩张到整个 $V \otimes W$ 上.

19.3　定义

设 $g \in G$. 对任意的 i, j, 定义

$$(v_i \otimes w_j)g = v_i g \otimes w_j g,$$

更一般地, 对任意的复数 λ_{ij}, 令

$$\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes w_j)\right)g = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i g \otimes w_j g).$$

19.4　命题

对任意的 $v \in V, w \in W$, 任意的 $g \in G$, 有

$$(v \otimes w)g = vg \otimes wg.$$

证明　设 $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i, w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$. 那么

$$\begin{aligned}
(v \otimes w)g &= \left(\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)\right)g \quad \text{根据命题19.1} \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i g \otimes w_j g) \\
&= \left(\sum_{i} \lambda_i v_i g\right) \otimes \left(\sum_{j} \mu_j w_j g\right) \quad \text{根据命题19.1} \\
&= vg \otimes wg.
\end{aligned}$$

证毕.

应当指出的是对 $\mathbb{C}G$ 中的大多数元素 r 有 $(v \otimes w)r \neq vr \otimes wr$. 例如, 当 r 是一个标量乘以 g 时.

19.5 命题

定义 19.3 给定的 $V \otimes W$ 中的一个元素乘以 G 中的一个元素的规则, 使得向量空间 $V \otimes W$ 成为一个 $\mathbb{C}G$-模.

证明 令 $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$, 且 $g, h \in G$. 那么

$$(v_i \otimes w_j)g = v_i g \otimes w_j g \in V \otimes W,$$

$$\begin{aligned}(v_i \otimes w_j)(gh) &= v_i(gh) \otimes w_j(gh) \\ &= (v_i g)h \otimes (w_j g)h \\ &= (v_i g \otimes w_j g)h \quad \text{根据命题19.4} \\ &= ((v_i \otimes w_j)g)h,\end{aligned}$$

$$(v_i \otimes w_j)1 = v_i \otimes w_j,$$

且

$$\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes w_j)\right)g = \sum_{i,j} \lambda_{ij}((v_i \otimes w_j)g).$$

所以命题 4.6 中的所有条件都满足了, $V \otimes W$ 是一个 $\mathbb{C}G$-模. 证毕.

现在计算 $V \otimes W$ 的特征标.

19.6 命题

令 V 和 W 是特征标分别为 χ 与 ψ 的 $\mathbb{C}G$-模, 那么 $\mathbb{C}G$-模 $V \otimes W$ 的特征标是积 $\chi\psi$, 其中

$$\chi\psi(g) = \chi(g)\psi(g), \quad \text{对任意的} g \in G.$$

证明 设 $g \in G$. 由命题 9.11, 可以选取 V 的一组基 $e_1, \ldots, e_m$, W 的一组基 $f_1, \ldots, f_n$ 使得存在复数 λ_i, μ_j 有

$$e_i g = \lambda_i e_i \quad (1 \leqslant i \leqslant m) \text{ 且 } f_j g = \mu_j f_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

那么

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i, \quad \psi(g) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j.$$

现在对 $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$ 有

$$(e_i \otimes f_j)g = e_i g \otimes f_j g = \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j),$$

根据命题 19.2, 向量 $e_i \otimes f_j$ 形成 $V \otimes W$ 的一组基. 因此, 若 ϕ 是 $V \otimes W$ 的特征标, 那么

$$\phi(g) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \left(\sum_i \lambda_i\right)\left(\sum_j \mu_j\right) = \chi(g)\psi(g).$$

证毕.

19.7　推论

G 的两个特征标的乘积仍是 G 的特征标.

19.8　例子

在 18.1 中给出了 S_4 的特征标表. 这里把特征标表拿过来, 并计算 $\chi_3\chi_4$ 与 $\chi_4\chi_4$.

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
$\|C_G(g_i)\|$	24	4	3	8	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1
$\chi_3\chi_4$	6	0	0	-2	0
$\chi_4\chi_4$	9	1	0	1	1

可以看到

$$\chi_3\chi_4 = \chi_4 + \chi_5, \text{且}$$
$$\chi_4\chi_4 = \chi_1 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5.$$

特征标的幂

推论 19.7 说明了如果 χ 是 G 的一个特征标, 那么 χ^2 也是 G 的一个特征标, 其中 $\chi^2 = \chi\chi$, 即 χ 与自身的乘积. 更一般地, 对任意一个非负整数 n, 定义 χ^n 为

$$\chi^n(g) = (\chi(g))^n. \quad \text{对任意的} g \in G.$$

这样 $\chi^0 = 1_G$. 利用推论 19.7 归纳证明可知 χ^n 是 G 的一个特征标. 当 χ 是忠实特征标时 (即 $\mathrm{Ker}\chi = \{1\}$)①, χ 的幂次会携带 G 的整个特征标表很多信息, 在接下来的定理 19.10 中将会看到.

在定理 19.10 的证明过程中将会用到下面所谓的"范德蒙德矩阵"的结论.

(19.9) 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 是互不相同的复数, 那么矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{r-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_r & \alpha_r^2 & \ldots & \alpha_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

是可逆的.

首先简要地描述下这个结论的证明.

假设 $x_1, \ldots, x_r$ 是未定元, 考虑

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{r-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_r & x_r^2 & \ldots & x_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

如果 $i \leqslant j$ 有 $x_i = x_j$, 那么给定矩阵中的两行是相同的, 所以 $\Delta = 0$. Δ 可被

$$\begin{aligned} \prod_{i<j}(x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_r) \\ \times(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_r) \\ \vdots \\ \times(x_{r-1} - x_r) \end{aligned}$$

整除.

现在 $x_1^{r-1}x_2^{r-2}\ldots x_{r-1}$ 在这个积中的系数是 1, 我们已经列出这个乘积, x_1^{r-1} 只能来自于第一行所有因子的乘积, x_2^{r-2} 只能来自第二行所有因子的乘积, 以此类推. 另一方面, 要在行列式 Δ 展开式中得到 $x_1^{r-1}x_2^{r-2}\ldots x_{r-1}$, 必须取矩阵第一行的 x_1^{r-1}, 第二行的 x_2^{r-2}, 以此类推. 因此 $x_1^{r-1}x_2^{r-2}\ldots x_{r-1}$ 在 Δ 中的系数是 ± 1. 所以

$$\Delta = \pm \prod_{i<j}(x_i - x_j).$$

① 原书为"$\mathrm{Ker} = \{1\}$", 译者修正为"$\mathrm{Ker}\chi = \{1\}$".

为了得到 (19.9), 将其中的 x_i 替换为 α_i, 其中 $1 \leqslant i \leqslant r$, 因为行列式是不等于 0 的, 所以矩阵 A 是可逆的.

19.10 定理

令 χ 是 G 的一个忠实特征标, 假设当 g 取遍 G 中所有的元素时, $\chi(g)$ 恰好取 r 个不同的值. 那么 G 中的每个不可约特征标是幂次 $\chi^0, \chi^1, \ldots, \chi^{r-1}$ 中的某个幂次的成分.

证明 令 χ 取的 r 个值为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. 对 $1 \leqslant i \leqslant r$, 定义

$$G_i = \{g \in G : \chi(g) = \alpha_i\}.$$

取 $\alpha_1 = \chi(1)$, 那么 $G_1 = \mathrm{Ker}\chi$. 因为 χ 是忠实特征标, 所以 $G_1 = \{1\}$.

现在设 ψ 是 G 的一个不可约特征标. 需要证明对于 $0 \leqslant j \leqslant r-1$ 中的某个 j 有 $\langle \chi^j, \psi \rangle \neq 0$.

对 $1 \leqslant i \leqslant r$, 令

$$\beta_i = \sum_{g \in G_i} \overline{\psi(g)},$$

那么 $\beta_1 = \psi(1) \neq 0$. 对任意的 $j \geqslant 0$ 有

$$\langle \chi^j, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi(g))^j \overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i)^j \beta_i.$$

令 A 是 ij-元为 $(\alpha_i)^{j-1}$ 的 $r \times r$ 阶矩阵, 令 b 是如下给定的行向量,

$$b = (\beta_1, \ldots, \beta_r).$$

由 (19.9) 知 A 是可逆的, 且因为 $\beta_1 \neq 0$, 所以 $b \neq 0$; 因此 $bA \neq 0$. 而行向量 bA 的第 $j+1$ 位置上元素等于 $|G|\langle \chi^j, \psi \rangle$. 所以存在 $0 \leqslant j \leqslant r-1$ 中的某个 j 有 $\langle \chi^j, \psi \rangle \neq 0$, 结论得证. 证毕.

19.11 例子

(1) 如果 $G \neq \{1\}$, 且 χ 是 G 的正则特征标, 那么 $\chi(g)$ 只能取两个不同的值 (参见命题 13.20), 所以根据定理 19.10 可知 G 的每个不可约特征标是 1_G 或 χ 的成分; 根据定理 10.5, 我们已经知道这个结果了.

(2) 令 $G = S_4$, 参考例子 19.8. 令 $\chi = \chi_4$. 那么 $\chi(g)$ 取 4 个不同的值. 我们已经知道

$$\chi^2 = \chi_1 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5,$$

并且又有

$$\langle \chi^3, \chi_2 \rangle = 1.$$

所以 $\chi^0, \chi^1, \chi^2, \chi^3$(实际上, 在这里只有 χ^2, χ^3) 中已经包含了 G 中所有的不可约特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_5$, 与定理 19.10 结论一致.

分 解 χ^2

根据定理 19.10, 将一个特征标 χ 的幂分解成不可约特征标的和是很重要的. 我们将会提出一个分解 χ^2 的方法, 并且我们将会看到这种特殊情况在找不可约特征标方面是非常有用的.

令 V 是特征标为 χ 的 $\mathbb{C}G$-模. 由命题 19.6, 模 $V \otimes V$ 的特征标为 χ^2. 令 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的一组基, 并定义一个线性变换 $T: V \otimes V \to V \otimes V$ 为

$$(v_i \otimes v_j)T = v_j \otimes v_i, \quad \text{对任意的} i, j,$$

并作线性扩张——即

$$\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j)\right)T = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_j \otimes v_i).$$

可以验证对任意的 $v, w \in V$, 有

$$(v \otimes w)T = w \otimes v.$$

因此 T 是与基的选取无关的.

现在定义 $V \otimes V$ 的子集如下:

$$S(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V : xT = x\},$$
$$A(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V : xT = -x\},$$

因为 T 是线性的, 容易知道 $S(V \otimes V)$ 和 $A(V \otimes V)$ 是 $V \otimes V$ 的子空间 (实际上, 它们是 T 的特征空间). 子空间 $S(V \otimes V)$ 称为 $V \otimes V$ 的对称部分, 子空间 $A(V \otimes V)$ 称为 $V \otimes V$ 的反对称部分.

19.12 命题

子空间 $S(V \otimes V)$ 和 $A(V \otimes V)$ 是 $V \otimes V$ 的 $\mathbb{C}G$-子模. 并且

$$V \otimes V = S(V \otimes V) \oplus A(V \otimes V).$$

证明 对任意的 $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}, g \in G$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j)\right)Tg &= \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_j g \otimes v_i g)\\ &= \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i g \otimes v_j g)T,\\ &= \left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j)\right)gT.\end{aligned}$$

所以 T 是从 $V \otimes V$ 到自身的一个 $\mathbb{C}G$-同态. 因此, 对 $x \in S(V \otimes V)$, $y \in A(V \otimes V)$ 和任意的 $g \in G$, 有

$$\begin{aligned}(xg)T &= (xT)g = xg,\\ (yg)T &= (yT)g = -yg,\end{aligned}$$

所以 $xg \in S(V \otimes V)$ 且 $yg \in A(V \otimes V)$. 因此 $S(V \otimes V)$ 和 $A(V \otimes V)$ 是 $V \otimes V$ 的 $\mathbb{C}G$-子模.

如果 $x \in S(V \otimes V) \cap A(V \otimes V)$, 那么 $x = xT = -x$, 所以 $x = 0$.

另外, 对任意的 $x \in V \otimes V$① 有

$$x = \frac{1}{2}(x + xT) + \frac{1}{2}(x - xT).$$

因为 T^2 是单位变换, $\frac{1}{2}(x + xT) \in S(V \otimes V)$ 和 $\frac{1}{2}(x - xT) \in A(V \otimes V)$. 所以

$$V \otimes V = S(V \otimes V) \oplus A(V \otimes V).$$

证毕.

$V \otimes V$ 的对称部分包含所有形式为 $v \otimes w + w \otimes v$ 的向量, 其中 $v, w \in V$, 而 $V \otimes V$ 的反对称部分包含所有形式为 $v \otimes w - w \otimes v$ 的向量. 现在说明 $V \otimes V$ 的对称部分和反对称部分的基包含形如上面的元素.

19.13 命题

令 V 的一组基为 $v_1, \ldots, v_n$.

(1) 向量 $v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ 组成 $S(V \otimes V)$ 的一组基. $S(V \otimes V)$ 的维数是 $n(n+1)/2$.

(2) 向量 $v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i (1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 组成 $A(V \otimes V)$ 的一组基. $A(V \otimes V)$ 的维数是 $n(n-1)/2$.

---

① 原书为“$x \in V$”, 译者修正为“$x \in V \otimes V$”.

证明 显然向量 $v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ 是 $S(V \otimes V)$ 的一组线性无关的元素, 向量 $v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i (1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 是 $A(V \otimes V)$ 的一组线性无关的元素. 因此

$$\dim S(V \otimes V) \geqslant n(n+1)/2, \quad \dim A(V \otimes V) \geqslant n(n-1)/2.$$

由命题 19.12,

$$\dim S(V \otimes V) + \dim A(V \otimes V) = \dim V \otimes V = n^2.$$

因此上面的不等式只能在取等号时成立. 证毕.

定义 χ_S 是 $\mathbb{C}G$-模 $S(V \otimes V)$ 的特征标, χ_A 是 $\mathbb{C}G$-模 $A(V \otimes V)$ 的特征标. 由命题 19.12,

$$\chi^2 = \chi_S + \chi_A.$$

接下来的结果给出了特征标 χ_S 和 χ_A 的值.

19.14 命题

对 $g \in G$, 有

$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2)),$$

$$\chi_A(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2)).$$

证明 由命题 9.11, 可以选取 V 的一组基 $e_1, \ldots, e_n$ 使得存在复数 λ_i 有 $e_i g = \lambda_i e_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. 那么

$$(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)g = \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i),$$

由命题 19.13(2) 有

$$\chi_A(g) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j.$$

现在 $e_i g^2 = \lambda_i^2 e_i$, 所以 $\chi(g) = \sum_i \lambda_i$ 且 $\chi(g^2) = \sum_i \lambda_i^2$. 所以

$$\chi^2(g) = (\chi(g))^2 = \sum_i \lambda_i^2 + 2\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \chi(g^2) + 2\chi_A(g).$$

因此

$$\chi_A(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2)).$$

又因为 $\chi^2 = \chi_S + \chi_A$, 所以

$$\chi_S(g) = \chi^2(g) - \chi_A(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2)).$$

证毕.

19.15　例子

令 $G = S_4$. G 的特征标表在例 19.8 中已经给出. 令 $\chi = \chi_4$. 特征标 χ, χ_S 和 χ_A 的值由命题 19.14 可以给出, 如下表:

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
$\|C_G(g_i)\|$	24	4	3	8	4
χ	3	1	0	−1	−1
χ_S	6	2	0	2	0
χ_A	3	−1	0	−1	1

可以发现 $\chi_S = \chi_1 + \chi_3 + \chi_4$ 和 $\chi_A = \chi_5$.

我们已经有了从一个或两个给定的不可约特征标得到一个群的新的不可约特征标的有效方法, 方法如下:

(1) 选定一个特征标 χ, 计算 χ_S 和 χ_A, 利用内积分析 χ_S 和 χ_A 是否是新的不可约特征标.

(2) 若 ψ 是在 (1) 中找到的新的特征标, 然后计算 ψ_S 和 ψ_A, 重复上述步骤.

我们用上述方法来计算两个例子.

19.16　例子　S_5 的特征标表

令 $G = S_5$, 5 次对称群. 由例 12.16(4) 知, G 的共轭类代表元 g_i, 共轭类大小和中心化子的阶 $|C_G(g_i)|$ 如下:

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)	(123)(45)	(12345)
共轭类大小	1	10	20	15	30	20	24
$\|C_G(g_i)\|$	120	12	6	8	4	6	5

这样 G 恰有 7 个不可约特征标.

(a) 线性特征标

根据例 17.13, $G' = A_5$ 且通过对 G/G' 的不可约特征标进行提升, G 恰有两个线性特征标 χ_1, χ_2. 有

$$\chi_1 = 1_G, \text{且} \chi_2(g) = \begin{cases} 1, & \text{若 } g \text{ 为偶置换}, \\ -1, & \text{若 } g \text{ 为奇置换}, \end{cases}$$

(b) 置换特征标

命题 13.24 给出了 G 的一个特征标 χ_3, 值为

$$\chi_3(g) = |\text{fix}(g)| - 1 \quad (g \in G).$$

观察计算有

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = \frac{4^2}{120} + \frac{2^2}{12} + \frac{1^2}{6} + \frac{(-1)^2}{6} + \frac{(-1)^2}{5} = 1.$$

因此, 根据定理 14.20, χ_3 是不可约的. 由命题 17.14 说明 $\chi_4 = \chi_3\chi_2$ 也是不可约特征标.

现在已经得到了 G 的特征标表的如下部分:

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)	(123)(45)	(12345)
$\|C_G(g_i)\|$	120	12	6	8	4	6	5
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	−1	1	1	−1	−1	1
χ_3	4	2	1	0	0	−1	−1
χ_4	4	−2	1	0	0	1	−1

(c) 张量积

现在利用张量积来构造 G 剩下的 3 个不可约特征标.

记 $\chi = \chi_3$. 根据命题 19.14 知特征标 χ_S 和 χ_A 的值如下:

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)	(123)(45)	(12345)
$\|C_G(g_i)\|$	120	12	6	8	4	6	5
χ_S	10	4	1	2	0	1	0
χ_A	6	0	0	−2	0	0	1

所以

$$\langle \chi_A, \chi_A \rangle = \frac{36}{120} + \frac{4}{8} + \frac{1}{5} = 1,$$

所以 χ_A 是一个新的不可约特征标, 称之为 χ_5.

接下来

$$\langle \chi_S, \chi_1 \rangle = \frac{10}{120} + \frac{4}{12} + \frac{1}{6} + \frac{2}{8} + \frac{1}{6} = 1,$$

$$\langle \chi_S, \chi_3 \rangle = \frac{40}{120} + \frac{8}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 1,$$

$$\langle \chi_S, \chi_S \rangle = \frac{100}{120} + \frac{16}{12} + \frac{1}{6} + \frac{4}{8} + \frac{1}{6} = 3.$$

所以

$$\chi_S = \chi_1 + \chi_3 + \psi,$$

其中 ψ 是次数为 5 的不可约特征标. 令 $\chi_6 = \psi$, 所以 $\chi_6 = \chi_S - \chi_1 - \chi_3$.

最后, $\chi_7 = \chi_6\chi_2$ 是另外一个次数为 5 的不可特征标.

现在我们找到了 S_5 的所有的 7 个不可约特征标. S_5 的特征标表如下:

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)	(123)(45)	(12345)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	120	12	6	8	4	6	5
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	−1	1	1	−1	−1	1
χ_3	4	2	1	0	0	−1	−1
χ_4	4	−2	1	0	0	1	−1
χ_5	6	0	0	−2	0	0	1
χ_6	5	1	−1	1	−1	1	0
χ_7	5	−1	−1	1	1	−1	0

19.17　例子　S_6 的特征标表

在这个例子中我们利用与前面例子相似的方法来求出对称群 S_6 的 11 个不可约特征标中的 8 个, 然后利用正交关系来找到剩下的 3 个不可约特征标.

令 $G = S_6$, 阶为 720. 用元素的轮换型的形式简记其所在的共轭类. 采用这个记号, 共轭类的大小和中心化子的阶如下所示 (参见习题 12.3):

轮换型	(1)	(2)	(3)	(2, 2)	(4)	(3, 2)	(5)	(2, 2, 2)	(3, 3)	(4, 2)	(6)
共轭类大小	1	15	40	45	90	120	144	15	40	90	120
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	720	48	18	16	8	6	5	48	18	8	6

因为 G 有 11 个共轭类, 所以它有 11 个不可约特征标.

(a) 线性特征标

由于所有的对称群 $S_n (n \geqslant 2)$ 的导群是 A_n, 所以能得到两个线性特征标 χ_1 和 χ_2, 其中

$$\chi_1 = 1_G, \chi_2(g) = \begin{cases} 1, & \text{若 } g \text{ 为偶置换}, \\ -1, & \text{若 } g \text{ 为奇置换} \end{cases}$$

(参见例 17.13).

(b) 置换特征标和张量积

根据命题 13.24, 由

$$\chi_3 = |\text{fix}(g)| - 1 \quad (g \in G)$$

给定的函数 χ_3 是 G 的一个特征标. 令 $\chi = \chi_3$. 特征标 χ, χ_S 和 χ_A 的值如下所示:

共轭类	(1)	(2)	(3)	(2, 2)	(4)	(3, 2)	(5)	(2, 2, 2)	(3, 3)	(4, 2)	(6)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	720	48	18	16	8	6	5	48	18	8	6
$\chi = \chi_3$	5	3	2	1	1	0	0	−1	−1	−1	−1
χ_S	15	7	3	3	1	1	0	3	0	1	0
χ_A	10	2	1	−2	0	−1	0	−2	1	0	1

计算有

$$\langle\chi_3,\chi_3\rangle=1,\langle\chi_A,\chi_A\rangle=1,$$
$$\langle\chi_S,\chi_1\rangle=1,\langle\chi_S,\chi_1\rangle=1,$$
$$\langle\chi_S,\chi_S\rangle=3.$$

所以 χ_3 是不可约的; $\chi_4=\chi_3\chi_2$ 也是不可约的. 同样地, $\chi_5=\chi_A$ 是不可约的, $\chi_6=\chi_5\chi_2$ 也是不可约的. 另外

$$\chi_S=\chi_1+\chi_3+\chi_7,$$

其中 χ_7 是次数为 9 的不可约特征标, $\chi_4=\chi_7\chi_2$ 也是不可约的.

不可约特征标 $\chi_1,\ldots,\chi_8$ 为 G 的特征标表的如下一部分.

共轭类	(1)	(2)	(3)	(2, 2)	(4)	(3, 2)	(5)	(2, 2, 2)	(3, 3)	(4, 2)	(6)
$\|C_G(g_i)\|$	720	48	18	16	8	6	5	48	18	8	6
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
χ_3	5	3	2	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1
χ_4	5	-3	2	1	-1	0	0	1	-1	-1	1
χ_5	10	2	1	-2	0	-1	0	-2	1	0	1
χ_6	10	-2	1	-2	0	1	0	2	1	0	-1
χ_7	9	3	0	1	-1	0	-1	3	0	1	0
χ_8	9	-3	0	1	1	0	-1	-3	0	1	0

(c) 正交关系

现在利用列正交关系来得到 G 的完整的特征标表. 稍后 (推论 22.16) 将会说明所有对称群的特征标表中的元素都为整数. 但是现在我们只知道仅对 $g^2=1$ 的元, $\chi(g)$ 是整数 (参见推论 13.10). 所以首先处理阶为 2 的元, 以便我们能确定其方程的解都是整数.

令 s 为置换 (12), t 为置换 (12)(34). 这样 s 和 t 的共轭类分别对应特征标表中的第二列和第四列. 从推论 13.10 我们知道对 G 的任意特征标 χ 来说, $\chi(s)$ 和 $\chi(t)$ 都是整数.

为了方便, 记 G 的剩下的 3 个不可约特征标为 χ_9,χ_{10} 和 χ_{11}.

由列正交关系有

$$\sum_{i=1}^{11}\chi_i(s)^2=48.$$

因此, $\chi_9(s)^2+\chi_{10}(s)^2+\chi_{11}(s)^2=2$.

不失一般性, 假设 $\chi_9(s)^2=\chi_{10}(s)^2=1,\chi_{11}(s)^2=0$. 现在 $\chi_9\chi_2$ 是不可约的, 且不等于 $\chi_1,\ldots,\chi_8$ 中的任何一个. 另外, 因为 $\chi_9\chi_2(s)=-\chi_9(s)$, 我们知道 $\chi_9\chi_2$

既不等于 χ_9 也不等于 χ_{11}. 所以,

$$\chi_9\chi_2 = \chi_{10}.$$

不失一般性, 假设

$$\chi_9(s) = 1, \quad \chi_{10}(s) = -1.$$

现在想办法找到 $\chi_i(1)$ 和 $\chi_i(t)$, 其中 $i = 9, 10, 11$. 也就是要求出下面部分特征标表中的整数 a, b, c, d, e, f:

代表元 共轭类	1 (1)	s (2)	t (2, 2)
χ_9	a	1	d
χ_{10}	b	-1	e
χ_{11}	c	0	f

由列正交关系给出

$$\sum_{i=1}^{11}\chi_i(1)\chi_i(s) = 0, \sum_{i=1}^{11}\chi_i(s)\chi_i(t) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{11}\chi_i(t)\chi_i(t) = 16, \sum_{i=1}^{11}\chi_i(1)\chi_i(t) = 0.$$

所以

$$a - b = 0, \quad d - e = 0,$$

$$d^2 + e^2 + f^2 = 2, \quad ad + be + cf = 10.$$

上述方程组的整数解中使得 a, b 为正整数的解为

$$d = e = 1, \quad f = 0, \quad a = b = 5.$$

最后利用关系 $\sum_{i=1}^{11}\chi_i(1)^2 = 720$ 得到 $c = 16$. 所以上述的部分特征标表为

代表元 共轭类	1 (1)	s (2)	t (2, 2)
χ_9	5	1	1
χ_{10}	5	-1	1
χ_{11}	16	0	0

现在可以求出每一列中剩下的三个未知数, 因为列正交关系会给出三个关于这些未知量的线性无关的方程 (因为上面的 3×3 阶矩阵是可逆的). 经过这些计算可以得到 S_6 完整的特征标表如下所示:

共轭类	(1)	(2)	(3)	(2, 2)	(4)	(3, 2)	(5)	(2, 2, 2)	(3, 3)	(4, 2)	(6)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	720	48	18	16	8	6	5	48	18	8	6
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
χ_3	5	3	2	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1
χ_4	5	-3	2	1	-1	0	0	1	-1	-1	1
χ_5	10	2	1	-2	0	-1	0	-2	1	0	1
χ_6	10	-2	1	-2	0	1	0	2	1	0	-1
χ_7	9	3	0	1	-1	0	-1	3	0	1	0
χ_8	9	-3	0	1	1	0	-1	-3	0	1	0
χ_9	5	1	-1	1	-1	1	0	-3	2	-1	0
χ_{10}	5	-1	-1	1	1	-1	0	3	2	-1	0
χ_{11}	16	0	-2	0	0	0	1	0	-2	0	0

直　　积

在本章的最后, 将说明给定群 G 和 H 的特征标表, 利用张量积能决定直积 $G\times H$ 的特征标表.

令 V 是一个基为 $v_1,\ldots,v_m$ 的 $\mathbb{C}G$-模,W 是一个基为 $w_1,\ldots,w_n$ 的 $\mathbb{C}H$-模. 对任意的 i,j, 其中 $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$ 和任意的 $g\in G, h\in H$, 定义

$$(v_i\otimes w_j)(g,h)=v_ig\otimes w_jh,$$

并将这个定义线性扩张到整个 $V\otimes W$ 上, 也就是, 对任意的 $\lambda_{ij}\in\mathbb{C}$, 有

$$\left(\sum_{i,j}\lambda_{ij}(v_i\otimes w_j)\right)(g,h)=\sum_{i,j}\lambda_{ij}(v_ig\otimes w_jh).$$

同命题 19.4 一样, 我们得到对任意的 $v\in V, w\in W$ 有

$$(v\otimes w)(g,h)=vg\otimes wh.$$

类似命题 19.5 的证明来证明 $V\otimes W$ 是一个 $\mathbb{C}(G\times H)$-模.

令 χ 是 V 的特征标,ψ 是 W 的特征标. 根据命题 19.6 的证明, $V\otimes W$ 的特征标是 $\chi\times\psi$, 其中

$$(\chi\times\psi)(g,h)=\chi(g)\psi(h)\quad (g\in G, h\in H).$$

19.18 定理

令 $\chi_1, \ldots, \chi_a$ 是 G 的互不相同的不可约特征标, $\psi_1, \ldots, \psi_b$ 是 H 的互不相同的不可约特征标. 那么 $G \times H$ 恰有 ab 个不可约特征标, 分别是

$$\chi_i \times \psi_j \quad (1 \leqslant i \leqslant a, 1 \leqslant j \leqslant b).$$

证明 对任意的 i, j, k, l 有

$$\begin{aligned}\langle \chi_i \times \psi_j, \chi_k \times \chi_l \rangle_{G \times H} &= \frac{1}{|G \times H|} \sum_{g \in G, h \in H} \chi_i(g)\psi_j(h)\overline{\chi_k(g)\psi_l(h)} \\ &= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\chi_k(g)}\right)\left(\frac{1}{|H|}\sum_{h \in H} \psi_j(h)\overline{\psi_l(h)}\right) \\ &= \langle \chi_i, \chi_k \rangle_G \langle \psi_j, \psi_l \rangle_H = \delta_{ik}\delta_{jl}\end{aligned}$$

(这里下标 $G \times H, G$ 和 H 分别表示 $G \times H, G$ 和 H 的特征标的内积). 这样 ab 个特征标 $\chi_i \times \psi_j$ 是互不相同且不可约的.

接下来, 对任意的 $g, x \in G$ 和 $h, y \in H$, 有

$$(x, y)^{-1}(g, h)(x, y) = (x^{-1}gx, y^{-1}hy).$$

因此, $G \times H$ 中的元素 (g, h) 和 (g', h') 是共轭的, 当且仅当元素 g 与 g' 在 G 中共轭, 且 h 与 h' 在 H 中共轭. 因此, 如果 $g_1, \ldots, g_a$ 是 G 中共轭类的代表元, $h_1, \ldots, h_b$ 是 H 中共轭类的代表元, 那么元素

$$(g_i, h_j) \quad (1 \leqslant i \leqslant a, 1 \leqslant j \leqslant b)$$

是 $G \times H$ 中共轭类的代表元. 特别地, $G \times H$ 中恰有 ab 个共轭类.

根据定理 15.3, $G \times H$ 恰有 ab 个不可约特征标, 所以我们找到的不可约特征标 $\chi_i \times \psi_j$ 必定是 $G \times H$ 的所有的不可约特征标. 证毕.

19.19 例子 $S_3 \times C_2$ 的特征标表

$S_3(\cong D_6)$ 的特征标表在例子 16.3(1) 中已经给出了, 现在这里再次利用它, 它的下面是 C_2 的特征标表.

S_3 的特征标表

g_i	1	(12)	(123)
$\|C_G(g_i)\|$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

C_2 的特征标表

h_i	1	-1
$\|C_H(h_i)\|$	2	2
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

$S_3 \times C_2$ 共轭类的代表元是

$$(1,1),((12),1),((123),1),(1,-1),((12),-1),((123),-1),$$

根据定理 19.18, $S_3 \times C_2$ 的特征标表如下所示:

(g_i,h_j)	$(1,1)$	$((12),1)$	$((123),1)$	$(1,-1)$	$((12),-1)$	$((123),-1)$
$\|C_{G\times H}(g_i,h_j)\|$	12	4	6	12	4	6
$\chi_1 \times \psi_1$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2 \times \psi_1$	1	-1	1	1	-1	1
$\chi_3 \times \psi_1$	2	0	-1	2	0	-1
$\chi_1 \times \psi_2$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_2 \times \psi_2$	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi_3 \times \psi_2$	2	0	-1	-2	0	1

习题 18.2 给出了 D_{12} 的特征标表, 将此处的结果与习题 18.2 进行比较 (习题 1.5 说明了 $D_{12} \cong S_3 \times C_2$).

第 19 章总结

1. G 的任意两个特征标的积仍是 G 的一个特征标.

2. 若 χ 是 G 的一个特征标, 那么 χ_S 和 χ_A 也是 G 的特征标, 其中

$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2)),$$

$$\chi_A(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2))$$

对任意的 $g \in G$.

3. $G \times H$ 的不可约特征标是那些特征标 $\chi \times \psi$, 其中 χ 是 G 的不可约特征标, ψ 是 H 的不可约特征标. 对任意的 $g \in G, h \in H, \chi \times \psi$ 的值是由

$$(\chi \times \psi)(g,h) = \chi(g)\psi(h)$$

确定的.

第 19 章习题

1. 令 χ, ψ 和 ϕ 是群 G 的特征标. 证明

$$\langle \chi\psi, \phi \rangle = \langle \chi, \overline{\psi}\phi \rangle = \langle \psi, \overline{\chi}\phi \rangle.$$

2. 假设 χ 和 ψ 是 G 的不可约特征标. 证明

$$\langle \chi\psi, 1_G \rangle = \begin{cases} 1, & 若\ \chi = \overline{\psi}, \\ 0, & 若\ \chi \neq \overline{\psi}. \end{cases}$$

3. 令 χ 是 G 的非忠实特征标. 说明存在 G 的某个特征标 ψ 使得对任意的整数 $n \geqslant 0$ 有 $\langle \chi^n, \psi \rangle = 0$ 成立. (这说明定理 19.10 中的假设 χ 是忠实特征标的条件是不能去掉的.)

4. 在下一章的例 20.14[①]中将说明 A_5 中存在不可约特征标 χ 和 ϕ 取如下的值:

	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
χ	5	-1	1	0	0
ϕ	3	0	-1	$(1+\sqrt{5})/2$	$(1-\sqrt{5})/2$

计算 χ_S, χ_A, ϕ_S 和 ϕ_A 的值. 并将这些特征标表示为例 20.14[②]中给定的 A_5 的不可约特征标 $\psi_1, \ldots, \psi_5$ 的线性组合.

5. 某个 24 阶群 G 有 7 个共轭类, 代表元为 $g_1, \ldots, g_7$; 另外 G 有一个特征标 χ 取值如下:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	24	4	6	6	6	6
χ	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω	ω^2

其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$. 另外, $g_1^2, g_2^2, g_3^2, g_4^2, g_5^2, g_6^2, g_7^2$ 分别与 $g_1, g_1, g_2, g_5, g_4, g_4, g_5$ 共轭.

找到 χ_S 和 χ_A, 并说明它们都是不可约的.

通过对目前已知的不可约特征标做积, 找到 G 的特征标表.

6. 写出 $D_6 \times D_6$ 的特征标表.

① 原书为"Example 20.13", 译者修正为"例 20.14".

② 原书为"Example 20.13", 译者修正为"例 20.14".

第 20 章　到子群上的限制

在这一章和下一章的内容中, 我们将要讨论如何把一个群的表示和这个群的子群的表示联系起来. 在这里, 我们介绍一种将一个 $\mathbb{C}G$-模限制到 G 的一个子群 H 上的基本思想, 并说明其应用. 其中, H 是 G 的一个正规子群是我们特别关注的一种情况, 并且 Clifford 定理 20.8 给出了这种情况下的一些重要的结论. 我们把这个结果应用到 H 是 G 的一个指数是 2 的正规子群这种情况上. 例如, 当 $G = S_n$, $H = A_n$ 时.

限　制

令 H 是有限群 G 的一个子群. 那么 $\mathbb{C}H$ 是 $\mathbb{C}G$ 的一个子集. 如果 V 是一个 $\mathbb{C}G$-模, 那么 V 也是一个 $\mathbb{C}H$-模, 这是因为如果定义 4.2 中的 (1)-(5) 对于所有的 $g, h \in G$ 成立, 那么对于所有的 $g, h \in H$ 也成立. 这个简单地把一个 $\mathbb{C}G$-模转化成为一个 $\mathbb{C}H$-模的方法通常叫做从 G 到 H 的限制. 如果 V 是一个 $\mathbb{C}G$-模, 那么把相应的 $\mathbb{C}H$-模记作 $V \downarrow H$, 叫做 V 到 H 上的限制.

$V \downarrow H$ 的特征标是由 V 的特征标 χ 在 H 上的限制得到. 我们把 H 的这个特征标记作 $\chi \downarrow H$, 即 χ 到 H 的限制. 更一般地, 如果 $f : G \to \mathbb{C}$ 是任意一个函数, 那么 $f \downarrow H$ 表示 f 到 H 上的限制 (因此有对于所有的 $h \in H$, $(f \downarrow H)(h) = f(h)$).

20.1　例子

令 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. 像在例 4.5(1) 中一样, 令 V 是基为 v_1, v_2 的 $\mathbb{C}G$-模, 其中

$$v_1 a = v_2, \quad v_1 b = v_1,$$
$$v_2 a = -v_1, \quad v_2 b = -v_2.$$

如果 H 是 G 的子群 $\{1, a^2, b, a^2 b\}$, 那么 $V \downarrow H$ 是基为 v_1, v_2 的 $\mathbb{C}H$-模, 其中

$$v_1 a^2 = -v_1, \quad v_1 b = v_1,$$
$$v_2 a^2 = -v_2, \quad v_2 b = -v_2.$$

V 的特征标 χ 由下表给出:

g	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
$\chi(g)$	2	0	-2	0	0	0	0	0

$V\downarrow H$ 的特征标 $\chi\downarrow H$ 由下表给出:

h	1	a^2	b	a^2b
$\chi(h)$	2	-2	0	0

如果 V 是一个 $\mathbb{C}G$-模, H 是 G 的一个子群, 那么 $\dim V = \dim(V\downarrow H)$. 然而, 有可能是 V 是一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模而 $V\downarrow H$ 不是一个不可约的 $\mathbb{C}H$-模; 例 20.1 就是这种情况. 另一方面, 如果 $V\downarrow H$ 是一个不可约的 $\mathbb{C}H$-模, 那么 V 是一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模. 这是因为如果 U 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模, 那么 $U\downarrow H$ 是 $V\downarrow H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模.

20.2　例子

令 $G=S_5$, H 是 G 的包含固定 5 不变的 $\{1,2,3,4\}$ 的所有的偶置换组成的子群 A_4. 由 18.2, H 的特征标表如下:

g_i	1	$(12)(34)$	(123)	(132)
$\lvert C_H(g_i)\rvert$	12	4	3	3
ψ_1	1	1	1	1
ψ_2	1	1	ω	ω^2
ψ_3	1	1	ω^2	ω
ψ_4	3	-1	0	0

$(\omega=e^{2\pi i/3})$. G 的特征标表在例 19.16 中给出, 不可约的特征标分别是 $\chi_1,\ldots,\chi_7$.

对于 $1\leqslant i\leqslant 7$, 把特征标 $\chi_i\downarrow H$ 表示为不可约特征标 ψ_j 的和. 从例 19.16 中可以看到

$$\chi_1\downarrow H=\chi_2\downarrow H, \chi_3\downarrow H=\chi_4\downarrow H, \chi_6\downarrow H=\chi_7\downarrow H.$$

因此, 只需要考虑 $\chi_1\downarrow H, \chi_3\downarrow H, \chi_5\downarrow H, \chi_6\downarrow H$. 它们的值如下表:

	1	$(12)(34)$	(123)	(132)
$\chi_1\downarrow H$	1	1	1	1
$\chi_3\downarrow H$	4	0	1	1
$\chi_5\downarrow H$	6	-2	0	0
$\chi_6\downarrow H$	5	1	-1	-1

很容易地看出

$$\chi_1\downarrow H=\psi_1,\quad \chi_3\downarrow H=\psi_1+\psi_4,$$
$$\chi_5\downarrow H=2\psi_4,\quad \chi_6\downarrow H=\psi_2+\psi_3+\psi_4.$$

限制特征标的成分

为了帮助我们讨论如何可以把一个限制特征标 $\chi \downarrow H$ 表示成 H 的不可约的特征标的形式, 我们引入下面的符号.

20.3　定义

内积 $\langle\ ,\ \rangle_G$ 是我们已经在前面定义过的从 G 到 $\mathbb{C}$ 的函数组成的向量空间的内积, 类似地, $\langle\ ,\ \rangle_H$ 是从 H 到 $\mathbb{C}$ 的函数组成的向量空间的内积. 因此, 如果 ϑ_1, ϑ_2 是从 G 到 $\mathbb{C}$ 的函数, 那么

$$\langle \vartheta_1, \vartheta_2 \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta_1(g) \overline{\vartheta_2(g)},$$

并且如果 ϕ_1, ϕ_2 是从 H 到 $\mathbb{C}$ 的函数, 那么

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \phi_1(h) \overline{\phi_2(h)}.$$

如果 χ 是 G 的一个特征标, 并且 $\psi_1, \ldots, \psi_r$ 是 G 的子群 H 的不可约的特征标, 那么由定理 14.17, 存在非负整数 $d_1, \ldots, d_r$ 使得

$$\chi \downarrow H = d_1\psi_1 + \ldots + d_r\psi_r,$$

其中 $d_i = \langle \chi \downarrow H, \psi_i \rangle_H$.

如果在上面的表达式中系数 d_i 是非零的, 那么就说 ψ_i 是 $\chi \downarrow H$ 的一个成分.

下面的命题说明了 H 的每个不可约特征标是 G 的某个不可约特征标的限制的一个成分.

20.4　命题

令 H 是 G 的一个子群, 令 ψ 是 H 的一个非零的特征标. 那么存在 G 的一个不可约的特征标 χ 使得

$$\langle \chi \downarrow H, \psi \rangle_H \neq 0.$$

证明　令 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 是 G 的不可约的特征标. 由定理 13.19 和命题 13.20 我们得到 G 的正则特征标 χ_{reg} 满足下面式子:

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1; \\ 0, & g \neq 1. \end{cases} \qquad \chi_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^{k} \chi_i(1)\chi_i.$$

现在有

$$0 \neq \frac{|G|}{|H|}\psi(1) = \langle \chi_{\text{reg}} \downarrow H, \psi \rangle_H = \sum_{i=1}^{k} \chi_i(1) \langle \chi_i \downarrow H, \psi \rangle_H.$$

因此, 存在某个 i 使得 $\langle \chi_i \downarrow H, \psi \rangle_H \neq 0$. 证毕.

假设知道了 G 的特征标表. 根据命题 20.4, 我们希望可以由 G 的不可约的特征标 χ 到 H 的限制找到子群 H 的特征标表. 不幸的是, 根据 H 的不可约的特征标写出限制 $\chi \downarrow H$ 在实际计算中可能是很困难的. 只有当指数 $|G:H|(=|G|/|H|)$ 比较小的时候我们可以利用这种方法, 这是因为 $\chi \downarrow H$ 在这个时候没有很多的成分, 就像下面的结果陈述的那样.

20.5　命题

令 H 是 G 的一个子群, χ 是 G 的一个不可约的特征标, $\psi_1, \ldots, \psi_r$ 是 H 的不可约的特征标. 那么 $\chi \downarrow H = d_1\psi_1 + \ldots + d_r\psi_r$, 其中非负整数 $d_1, \ldots, d_r$ 满足下面式子:

(20.6)
$$\sum_{i=1}^{r} d_i^2 \leqslant |G:H|.$$

更进一步地, (20.6) 中等号成立当且仅当对于所有的 $g \in G$ 但是 $g \notin H$ 来说, 有 $\chi(g) = 0$ 成立.

证明　由定理 14.17, 有

$$\sum_{i=1}^{r} d_i^2 = \langle \chi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(h)\overline{\chi(h)}.$$

同时, 因为 χ 是不可约的, 所以

$$\begin{aligned} 1 = \langle \chi, \chi \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} \chi(h)\overline{\chi(h)} + K \\ &= \frac{|H|}{|G|} \sum_{i=1}^{r} d_i^2 + K, \end{aligned}$$

其中$K = \frac{1}{|G|} \sum_{g \notin H} \chi(g)\overline{\chi(g)}$. 现在 $K \geqslant 0$, 并且 $K = 0$ 当且仅当对于所有的 $g \in G$ 但 $g \notin H$ 有 $\chi(g) = 0$. 那么命题的结论立刻就可以得到了. 证毕.

如果 H 是 G 的一个正规子群, 那么可以得到 $\chi \downarrow H$ 的成分的更多的信息. 例如, 我们将会说明 $\chi \downarrow H$ 的所有成分具有相同的次数.

关于 $H \triangleleft G$ 的情况将在下面的命题中说明.

20.7 命题

假设 $H \lhd G$. 令 V 是一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模, U 是 $V \downarrow H$ 的一个不可约的 $\mathbb{C}H$-子模. 对于任意的 $g \in G$ 来说, 令 $Ug = \{ug : u \in U\}$. 那么

(1) 集合 Ug 是 $V \downarrow H$ 的一个不可约的 $\mathbb{C}H$-子模, 并且有 $\dim Ug = \dim U$.

(2) 作为一个 $\mathbb{C}H$-模, V 是某些 $\mathbb{C}H$-模 Ug 的一个直和.

(3) 如果 $g_1, g_2, g \in G$, 并且 Ug_1 和 Ug_2 是同构的 $\mathbb{C}H$-模, 那么 Ug_1g 和 Ug_2g 是同构的 $\mathbb{C}H$-模.

证明 (1) 很容易地看出 Ug 是 V 的一个子空间, 因为 $H \lhd G$, 那么对于所有的 $h \in H$, 有 $ghg^{-1} \in H$, 所以

$$(ug)h = u(ghg^{-1})g \in Ug \quad (u \in U),$$

证明 Ug 是 $V \downarrow H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模. 更进一步地, 如果 W 是 Ug 的一个 $\mathbb{C}H$-子模, 那么 Wg^{-1} 是 U 的一个 $\mathbb{C}H$-子模, 因为 U 是不可约的, 所以 $Wg^{-1} = \{0\}$ 或 U, 所以 $W = \{0\}$ 或 Ug. 因此, Ug 是一个不可约的 $\mathbb{C}H$-模. 又因为 $u \mapsto ug (u \in U)$ 是从 U 到 Ug 的一个可逆的线性变换, 所以 $\dim Ug = \dim U$.

(2) 所有的子空间 $Ug (g \in G)$ 的和是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模. 因此, 由 V 是不可约的, 得到

$$V = \sum_{g \in G} Ug.$$

那么由命题 7.12 我们知道 V 是某些 $\mathbb{C}H$-模 Ug 的一个直和.

(3) 现在令 ϕ 是从 Ug_1 到 Ug_2 的一个 $\mathbb{C}H$-同构. 如下定义 $\theta : Ug_1g \to Ug_2g$

$$\theta : wg \mapsto (w\phi)g \quad (w \in Ug_1).$$

那么很显然 θ 是向量空间的一个同构. 假设 $h \in H$, 那么存在 $h' \in H$ 使得 $gh = h'g$, 并且

$$\begin{aligned}(wgh)\theta &= (wh'g)\theta = (wh'\phi)g = (w\phi)h'g \\ &= (w\phi)gh = (wg\theta)h.\end{aligned}$$

因此, θ 是一个 $\mathbb{C}H$-同构. 证毕.

现在来看一个特征标到一个正规子群的限制上的基本定理.

20.8 Clifford 定理

假设 $H \lhd G$. χ 是 G 的一个不可约的特征标. 那么

(1) $\chi \downarrow H$ 的所有的成分有相同的次数;

(2) 如果 $\psi_1, \ldots, \psi_m$ 是 $\chi \downarrow H$ 的所有的成分, 那么存在某个正整数 e 使得下式成立:

$$\chi \downarrow H = e(\psi_1 + \ldots + \psi_m).$$

证明　令 V 是特征标为 χ 的一个 $\mathbb{C}G$-模. 那么由命题 20.7 的 (1),(2) 我们知道 $\chi \downarrow H$ 的所有的成分有相同的次数.

令 $e = \langle \chi \downarrow H, \psi_1 \rangle$. 那么 V 包含一个特征标为 $e\psi_1$ 的 $\mathbb{C}H$-模 X_1, 因此 X_1 是 e 个特征标为 ψ_1 的同构的 $\mathbb{C}H$-模的直和, 即

$$X_1 = U_1 \oplus \ldots \oplus U_e.$$

由命题 20.7(3), 如果 $g \in G$, 那么 $X_1 g$ 是同构的 $\mathbb{C}H$-模的一个直和. 另一方面, 由命题 20.7(2) 我们知道 V 是形如 $X_1 g$ 的 $\mathbb{C}H$-模的和. 因此 V 有如下形式:

$$V = X_1 \oplus \ldots \oplus X_m,$$

其中每个 X_i 是 e 个同构的 $\mathbb{C}H$-模的直和, 并且有如果 $i \neq j$, 那么 $X_i \ncong X_j$. 因此

$$\chi \downarrow H = e(\psi_1 + \ldots + \psi_m).$$

证毕.

我们这里对 Clifford 定理的应用主要考虑当 $|G : H| = 2$ 的时候, 对于该定理进一步的应用参见第 22 章的推论 22.14.

指数为 2 的正规子群

在 H 是 G 的指数为 2 的正规子群的情况下 (也就是说 $|G : H| = 2$), 将会给出 $\chi \downarrow H$ 的成分的更多的准确信息. 这种情况的例子有, 比如 $G = S_n, H = A_n$, 或者 $G = D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle, H = \langle a \rangle$. 事实上, 如果 H 是 G 的指数为 2 的一个子群, 那么 H 一定是 G 的正规子群 (见习题 1.10).

当 H 是 G 的指数为 2 的正规子群时, H 和 G 的特征标表是紧密相关的. 我们将会在下面的 (20.13) 中描述这个关系, 并且我们会通过从 S_5 的特征标表中得到 A_5 的特征标表来说明这个结果 (其中 S_5 的特征标表已经在例 19.16 中得到).

20.9　命题

假设 H 是 G 的指数为 2 的正规子群, 令 χ 是 G 的一个不可约的特征标. 那么或者

(1) $\chi \downarrow H$ 是不可约的, 或者

(2) $\chi \downarrow H$ 是 H 的两个不同的但有相同次数的不可约的特征标的和.

证明　如果 $\psi_1, \ldots, \psi_r$ 是 H 的不可约的特征标, 那么由命题 20.5,

$$\chi \downarrow H = d_1\psi_1 + \ldots + d_r\psi_r,$$

其中 $\sum_{i=1}^{r} d_i^2 \leqslant 2$. 因为 $d_1, \ldots, d_r$ 是非负整数, 我们得到或者存在某个 i 使得 $\chi \downarrow H = \psi_i$ 成立, 或者存在 $i, j (i \neq j)$ 使得 $\chi \downarrow H = \psi_i + \psi_j$. 在后一种情况下, 由 Clifford 定理 20.8 我们知道 ψ_i 和 ψ_j 有相同的次数. 证毕.

考虑到实际计算, 我们总是希望知道命题 20.9 中的两种情况的更多的信息, 我们将会在下面给出.

因为 $G/H \cong C_2$, 我们可以通过对 G/H 的非平凡的线性特征标进行提升来得到 G 的一个线性特征标 λ, 其中 λ 满足:

$$\lambda(g) = \begin{cases} 1, & g \in G, \\ -1, & g \notin G. \end{cases}$$

注意到对于 G 的所有的不可约的特征标 χ 来说, χ 和 $\chi\lambda$ 是次数相同的不可约的特征标 (见命题 17.14). 同时, $\chi \downarrow H = \chi\lambda \downarrow H$, 这是因为对于所有的 $h \in H$, 有 $\lambda(h) = 1$.

20.10　命题

假设 H 是 G 的指数为 2 的正规子群, 令 χ 是 G 的一个不可约的特征标. 那么下面的三个条件是等价的:

(1) $\chi \downarrow H$ 是不可约的;

(2) 存在 $g \in G$ 但 $g \notin H$ 使得 $\chi(g) \neq 0$ 成立;

(3) G 的特征标 χ 和 $\chi\lambda$ 不相等.

证明　应用命题 20.5, 因为 $|G : H| = 2$, $\chi \downarrow H$ 是不可约的当且仅当 (20.6) 中的不等式中的不等号严格成立当且仅当存在 $g \in G$ 但 $g \notin H$ 使得 $\chi(g) \neq 0$. 因此 (1) 与 (2) 等价.

为了证明 (2) 与 (3) 等价, 注意到

$$\chi\lambda(g) = \begin{cases} \chi(g), & g \in H, \\ -\chi(g), & g \notin H. \end{cases}$$

所以存在 $g \in G$ 但 $g \notin H$ 使得 $\chi(g) \neq 0$ 当且仅当 $\chi\lambda \neq \chi$. 证毕.

根据命题 20.9, 如果 H 是 G 的指数为 2 的正规子群, χ 是 G 的一个不可约的特征标, 那么 $\chi \downarrow H$ 是 H 的一个或两个不可约特征标的和. 在下面的命题中先考虑第一种可能.

20.11　命题

假设 H 是 G 的指数为 2 的正规子群, χ 是 G 的一个不可约的特征标, 并且 $\chi \downarrow H$ 是不可约的. 如果 ϕ 是 G 的一个不可约的特征标, 它满足

$$\phi \downarrow H = \chi \downarrow H,$$

那么或者 $\phi = \chi$ 或者 $\phi = \chi\lambda$.

证明　有

$$(\chi + \chi\lambda)(g) = \begin{cases} 2\chi(g), & g \in H, \\ 0, & g \notin H. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \langle \chi + \chi\lambda, \phi \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in H} 2\chi(g)\overline{\phi(g)} \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \chi(g)\overline{\phi(g)} \\ &= \langle \chi \downarrow H, \phi \downarrow H \rangle_H. \end{aligned}$$

现在有 $\langle \chi \downarrow H, \phi \downarrow H \rangle_H = 1$, 这是因为 $\chi \downarrow H$ 是不可约的且有 $\phi \downarrow H = \chi \downarrow H$. 因此 $\langle \chi + \chi\lambda, \phi \rangle_G = 1$, 所以或者 $\phi = \chi$ 成立或者 $\phi = \chi\lambda$ 成立. 证毕.

最后看看 $\chi \downarrow H$ 是可约的情况.

20.12　命题

假设 H 是 G 的指数为 2 的正规子群, χ 是 G 的一个不可约的特征标, 并且 $\chi \downarrow H$ 是 H 的两个不可约特征标的和, 即 $\chi \downarrow H = \psi_1 + \psi_2$. 如果 ϕ 是 G 的一个使得 ψ_1 或 ψ_2 是 $\phi \downarrow H$ 的成分的不可约特征标, 那么 $\phi = \chi$.

证明　由命题 20.10, 对于所有的 $g \in G$ 但 $g \notin H$ 有 $\chi(g) = 0$. 因此

$$\begin{aligned} \langle \phi, \chi \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in H} \phi(g)\overline{\chi(g)} \\ &= \frac{1}{2} \langle \phi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H. \end{aligned}$$

如果 ψ_1 或 ψ_2 是 $\phi \downarrow H$ 的成分, 那么 $\langle \phi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H \neq 0$, 所以 $\langle \phi, \chi \rangle_G \neq 0$, 因此 $\phi = \chi$. 证毕.

我们把指数为 2 的子群的结论总结一下, 说明怎样在已知 G 的特征标表的情况下列出 H 的所有的不可约的特征标.

(20.13) 令 H 是 G 的指数为 2 的正规子群.

(1) G 的每个不可约的在 H 以外的某个元素上非零的特征标 χ 限制到 H 上是 H 的一个不可约的特征标. G 的这样的特征标是成对出现的 (χ 和 $\chi\lambda$), 并且它们在 H 上的限制是相同的 (命题 20.10 和命题 20.11).

(2) 如果 χ 是 G 的一个在 H 以外的所有元素上全是零的不可约的特征标, 那么 χ 限制到 H 上是 H 的两个不同的但有相同次数的不可约的特征标的和. 用这种方式从 χ 得到的 H 的两个特征标不再从 G 的其他不可约的特征标中得到 (命题 20.10 和命题 20.12).

(3) H 的每个不可约的特征标都是从 G 的不可约的特征标到 H 的限制得到的, 就像 (1) 和 (2) 部分一样 (命题 20.4).

在 (20.13) 的 (2) 中, 我们还需要对 $\chi \downarrow H$ 的两个成分的取值来进一步进行计算. 幸运的是, 在实际问题中 (1) 比 (2) 更常见.

20.14 例子 A_5的特征标表

令 $H = A_5$, 注意到 H 是 S_5 的指数为 2 的正规子群. 已经在例 12.18(2) 中给出了 H 的共轭类和它们的大小, 并且 S_5 的不可约特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_7$ 在例 19.16 中也已经给出.

观察到 χ_1,χ_3 和 χ_6 在 H 以外的某个元素上非零, 所以根据 (20.13)(1) 得到 $\chi_1 \downarrow H$, $\chi_3 \downarrow H$ 和 $\chi_6 \downarrow H$ 是 H 的不可约特征标. 把它们分别记作 ψ_1, ψ_2 和 ψ_3. 同时对于所有的 $g \notin H$ 有 $\chi_5(g) = 0$. 所以根据 (20.13)(2) 得到 $\chi_5 \downarrow H = \psi_4 + \psi_5$, 其中 ψ_4 和 ψ_5 是 H 的次数为 3 的不同的不可约特征标. 注意到 $\chi_1 \downarrow H = \chi_2 \downarrow H, \chi_3 \downarrow H = \chi_4 \downarrow H, \chi_6 \downarrow H = \chi_7 \downarrow H$, 因此由 (20.13)(3) 得 $\psi_1, \ldots, \psi_5$ 是 H 的不同的不可约特征标.

到此为止我们由 (20.13) 得到关于指数为 2 的子群的特征标的一些结论. 这些结论也可以通过计算内积来验证. 已经建立的 H 的特征标表如下:

g_i	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	60	3	4	5	5
ψ_1	1	1	1	1	1
ψ_2	4	1	0	-1	-1
ψ_3	5	-1	1	0	0
ψ_4	3	α_2	α_3	α_4	α_5
ψ_5	3	β_2	β_3	β_4	β_5

我们运用列正交的关系来计算未知数 α_i 和 β_i. 对于 $2 \leqslant i \leqslant 5$ 来说, $\alpha_i + \beta_i$ 的值是由 $\chi_5 \downarrow H = \psi_4 + \psi_5$ 给出的 (或者对第一列和第 i 列应用列正交的关系来

得到). 我们得到

$$\alpha_2+\beta_2=0,\quad \alpha_3+\beta_3=-2,\quad \alpha_4+\beta_4=\alpha_5+\beta_5=1.$$

应用命题 12.13 得到 A_5 的每个元素都与它的逆共轭. 因此由命题 13.9(4) 我们知道特征标表里的所有的数字都是实数. 对第 2 到 5 列和它们本身应用列正交关系得到

$$3=3+\alpha_2^2+\beta_2^2,$$

$$4=2+\alpha_3^2+\beta_3^2,$$

$$5=2+\alpha_4^2+\beta_4^2=2+\alpha_5^2+\beta_5^2.$$

因此

$$\alpha_2=\beta_2=0,\quad \alpha_3=\beta_3=-1,$$

并且我们发现 α_4 和 β_4 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的解. 在不用区分 ψ_4 和 ψ_5 的情况下, 可以令

$$\alpha_4=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad \beta_4=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

类似地, α_5 和 β_5 是 $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$. 因为 $\psi_4\neq\psi_5$, 有

$$\alpha_5=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),\quad \beta_5=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

因此 A_5 的特征标表如下:

g_i	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13425)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	60	3	4	5	5
ψ_1	1	1	1	1	1
ψ_2	4	1	0	-1	-1
ψ_3	5	-1	1	0	0
ψ_4	3	0	-1	α	β
ψ_5	3	0	-1	β	α

其中 $\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\beta=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

命题 17.6 告诉我们从特征标表中可以推断出 A_5 是一个单群.

第 20 章总结

以下都假设 H 是 G 的子群.

1. 如果 χ 是 G 的一个特征标, 那么 $\chi\downarrow H$ 是 H 的一个特征标. 那么对于所有的 $h\in H$, $\chi\downarrow H$ 的值由如下式子给出:

$$(\chi\downarrow H)(h)=\chi(h).$$

特别地, χ 和 $\chi\downarrow H$ 有相同的次数.

2. $\chi\downarrow H$ 的不可约的成分的数量的上界是 $|G:H|$. 事实上, 如果 $\psi_1,\ldots,\psi_r$ 是 H 的不可约的特征标, 并且 $\chi\downarrow H=d_1\psi_1+\ldots+d_r\psi_r$, 那么

$$\sum_{i=1}^{r}d_i^2\leqslant|G:H|.$$

3. 如果 H 是 G 的一个正规子群, χ 是 G 的一个不可约的特征标, 那么 $\chi\downarrow H$ 的所有的成分的次数相同.

第 20 章习题

1. 令 $G=S_4$, 令 H 是 G 的子群 $\langle(1234),(13)\rangle$.

(a) 证明 $H\cong D_8$.

(b) 对于 G 的每个不可约的特征标 χ(在 18.1 中给出) 来说, 把 $\chi\downarrow H$ 表达成 H 的不可约的特征标的和.

2. 应用 S_6 的不可约的特征标 (在例 19.17 中给出) 的限制建立 A_6的特征标表 (A_6 的七个共轭类可以参考习题 12.3 和 12.4 的结果).

3. 令 G 是有一个指数为 n 的交换子群的群. 证明对于 G 的每个不可约的特征标 χ 来说, $\chi(1)\leqslant n$.

4. 假设 G 是有一个指数为 3 的子群 H 的群. 令 χ 是 G 的一个不可约的特征标. 证明

$$\langle\chi\downarrow H,\chi\downarrow H\rangle_H=1,2\text{ 或者 }3.$$

分别给出这三种情况下的例子.

5. 已知 S_7的不可约的特征标的次数的完整的列表是

$$1,1,6,6,14,14,14,14,15,15,20,21,21,35,35,$$

并且 A_7 有 9 个共轭类. 找出 A_7的不可约的特征标的次数的完整的列表.

第 21 章　诱导模与诱导特征标

在本章中假设群 H 是有限群 G 的一个子群. 通过前一章我们看到限制给出了通过 $\mathbb{C}G$-模转换成 $\mathbb{C}H$-模的简单方法, 然而比这一过程更加巧妙的是诱导过程, 即通过给定的 $\mathbb{C}H$-模来构造 $\mathbb{C}G$-模, 在本章中将重点讨论诱导. 由于群 H 比群 G 小, 故一般情况下 $\mathbb{C}H$-模比 $\mathbb{C}G$-模更容易理解和构造, 因此当已知一个群的子群的表示时, 群的诱导为我们提供了一个了解该群的表示的有效方法, 我们将在后面的章节中看到这一方法的更多应用.

在描述群的诱导过程之前, 先给出一些结论将 $\mathbb{C}H$-同态与 $\mathbb{C}G$-同态联系起来.

$\mathbb{C}H$-同态与 $\mathbb{C}G$-同态

假设 U 为正则 $\mathbb{C}H$-模 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模. 若 $r \in \mathbb{C}G$, 则

$$\vartheta : u \mapsto ru \quad (u \in U)$$

定义了一个从 U 到 $\mathbb{C}G$ 的 $\mathbb{C}H$-同态, 因为对于所有的 $s \in \mathbb{C}H$ 有 $(us)\vartheta = rus = (u\vartheta)s$. 现在要证明一个非常精彩的结论: 每一个从 U 到 $\mathbb{C}G$ 的 $\mathbb{C}H$-同态均具有这样简单的形式.

21.1　命题

假设 $H \leqslant G$ 且 U 为 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模. 若 ϑ 是从 U 到 $\mathbb{C}G$ 的 $\mathbb{C}H$-同态, 则存在一个 $r \in \mathbb{C}G$ 使得

$$u\vartheta = ru \quad \text{对于所有的} u \in U.$$

证明　利用 Maschke 定理 8.1 可知, 存在 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模 W, 使得 $\mathbb{C}H = U \oplus W$. 定义 $\phi : \mathbb{C}H \to \mathbb{C}G$ 为

$$\phi : u + w \mapsto u\vartheta \quad (u \in U, w \in W).$$

从而易知 ϕ 是一个 $\mathbb{C}H$-同态. 令 $r = 1\phi$. 则对于所有的 $u \in U$,

$$u\vartheta = u\phi = (1u)\phi = (1\phi)u = ru,$$

从而知 ϑ 具有所需要的形式. 证毕.

下面给出命题 21.1 的两个推论. 其中第一个推论就是命题在 $H = G$ 的情况.

21.2 推论

假设 U 为 $\mathbb{C}G$ 的一个 $\mathbb{C}G$-子模. 则每一个从 U 到 $\mathbb{C}G$ 的 $\mathbb{C}G$-同态的形式均为

$$u \mapsto ru(u \in U),$$

其中 $r \in \mathbb{C}G$.

21.3 推论

假设 U 与 V 为 $\mathbb{C}G$ 的两个 $\mathbb{C}G$-子模. 则下面的条件等价:

(1) $U \cap V = \{0\}$;

(2) 存在 $r \in \mathbb{C}G$ 使得对于所有的 $u \in U, v \in V$,

$$ru = u \text{ 且 } rv = 0.$$

证明 假设 $U \cap V = \{0\}$. 则 $U + V$ 为直和, 从而根据命题 7.11 知函数

$$u + v \mapsto u \quad (u \in U, v \in V)$$

为从 $U \oplus V$ 到 $\mathbb{C}G$ 的 $\mathbb{C}G$-同态. 从而根据推论 21.2, 存在 $r \in \mathbb{C}G$ 使得对于所有的 $u \in U, v \in V$ 有

$$r(u + v) = u.$$

因此若 $u \in U$, 则 $ru = u$, 若 $v \in V$, 则 $rv = 0$.

反过来, 假设存在 $r \in \mathbb{C}G$ 使得对于所有的 $u \in U, v \in V$,

$$ru = u \text{ 且 } rv = 0.$$

若 $x \in U \cap V$, 则 $rx = x, rx = 0$, 即 $x = 0$. 从而 $U \cap V = \{0\}$. 证毕.

从 H 到 G 上的诱导

对于 $\mathbb{C}G$ 的每一个子集 X, 记 $X(\mathbb{C}G)$ 为 $\mathbb{C}G$ 中由所有的 $xg(x \in X, g \in G)$ 所张成的子空间. 即

$$X(\mathbb{C}G) = sp\{xg : x \in X, g \in G\}.$$

显然 $X(\mathbb{C}G)$ 为 $\mathbb{C}G$ 的一个 $\mathbb{C}G$-子模. 由于 H 为 G 的一个子群, 从而 $\mathbb{C}H$ 为 $\mathbb{C}G$ 的一个子集.

21.4 定义

假设 H 为 G 的一个子群. 令 U 为 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模, 并用 $U \uparrow G$ 表示 $\mathbb{C}G$-模 $U(\mathbb{C}G)$. 则称 $U \uparrow G$ 为由 U 诱导的 $\mathbb{C}G$-模.

21.5　例子

假设 $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, $H = \langle a \rangle$ 为 G 的一个 3 阶循环子群, 记 $\omega = e^{2\pi i/3}$, 并且定义

$$W_0 = sp(1 + a + a^2),$$

$$W_1 = sp(1 + \omega^2 a + \omega a^2),$$

$$W_2 = sp(1 + \omega a + \omega^2 a^2).$$

它们是 $\mathbb{C}H$ 的 $\mathbb{C}H$-子模 (见例 10.8(1)). 显然

$$W_0 \uparrow G = sp(1 + a + a^2, b + ab + a^2 b),$$

$$W_1 \uparrow G = sp(1 + \omega^2 a + \omega a^2, b + \omega^2 ab + \omega a^2 b),$$

$$W_2 \uparrow G = sp(1 + \omega a + \omega^2 a^2, b + \omega ab + \omega^2 a^2 b).$$

根据例 10.8(2) 可知

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4,$$

其中

$$U_1 = sp(1 + a + a^2 + b + ab + a^2 b),$$

$$U_2 = sp(1 + a + a^2 - b - ab - a^2 b),$$

$$U_3 = sp(1 + \omega^2 a + \omega a^2, b + \omega^2 ab + \omega a^2 b),$$

$$U_4 = sp(1 + \omega a + \omega^2 a^2, b + \omega ab + \omega^2 a^2 b).$$

因此

$$W_0 \uparrow G = U_1 \oplus U_2, \quad W_1 \uparrow G = U_3, \quad W_2 \uparrow G = U_4.$$

特别地, $W_0 \uparrow G$ 是可约的, 而 $W_1 \uparrow G$ 与 $W_2 \uparrow G$ 是不可约的. 下面将证明同构的 $\mathbb{C}H$-模诱导出同构的 $\mathbb{C}G$-模.

21.6　命题

假设 $H \leqslant G$, U 与 V 为 $\mathbb{C}H$ 的两个 $\mathbb{C}H$-子模且 U 与 V 有 $\mathbb{C}H$-同构. 则 $U \uparrow G$ 可以 $\mathbb{C}G$-同构于 $V \uparrow G$.

证明　假设 $\vartheta : U \to V$ 是一个 $\mathbb{C}H$-同构. 根据命题 21.1, 存在 $r \in \mathbb{C}G$ 使得对于所有的 $u \in U$ 有 $u\vartheta = ru$, 同样地, 存在 $s \in \mathbb{C}G$ 使得对于所有的 $v \in V$ 有 $v\vartheta^{-1} = sv$. 从而

$$sru = u \text{ 且 } rsv = v \text{ 对于所有的 } \quad u \in U, v \in V.$$

若 $a \in U \uparrow G$, 则 a 为 $ug(u \in U, g \in G)$ 的线性组合, 从而 ra 为 rug 的线性组合, 因此 $ra \in V \uparrow G$. 从而函数 $\phi : a \mapsto ra(a \in U \uparrow G)$ 是从 $U \uparrow G$ 到 $V \uparrow G$ 的一个函数. 此外, 因为 $(a\phi)g = rag = (ag)\phi(a \in U \uparrow G, g \in G)$, 所以 ϕ 是一个 $\mathbb{C}G$-同态. 由于对于所有的 $u \in U, v \in V$ 有 $sru = u, rsv = v$, 则

$$sra = a, rsb = b \quad \text{对于所有的} a \in U \uparrow G, b \in V \uparrow G.$$

从而函数

$$b \mapsto sb(b \in V \uparrow G)$$

是 ϕ 的逆. 因此 ϕ 是一个 $\mathbb{C}G$-同构. 命题得证. 证毕.

下一个命题及其推论保证了我们可以在任意的 $\mathbb{C}H$-模 U 上定义诱导模 $U \uparrow G$.

21.7　命题

假设 U 与 V 为 $\mathbb{C}H$ 的两个 $\mathbb{C}H$-子模, 且 $U \cap V = \{0\}$, 则 $(U \uparrow G) \cap (V \uparrow G) = \{0\}$.

证明　根据命题 21.3 可知, 存在 $r \in \mathbb{C}G$ 使得对于所有的 $u \in U, v \in V$,

$$ru = u \text{ 且 } rv = 0.$$

从而对于所有的 $u \in U, v \in V$ 以及所有的 $g \in G$ 有

$$rug = ug, \quad rvg = 0.$$

由于 $U \uparrow G$ 是由所有的 $ug(u \in U, g \in G)$ 张成的空间, 因此

$$ru' = u' \quad \text{对于所有的} u' \in U \uparrow G,$$

同样的有

$$rv' = 0 \quad \text{对于所有的} v' \in V \uparrow G.$$

从而根据推论 21.3 可知 $(U \uparrow G) \cap (V \uparrow G) = \{0\}$. 证毕.

21.8　推论

假设 U 是 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模, 令

$$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m,$$

为 $\mathbb{C}H$-子模 U_i 的直和. 则

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow G).$$

证明　通过对 m 作归纳来证明结论. 当 $m=1$ 时结论显然成立. 现在假设 $U = U_1 \oplus V$, 其中 $V = U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$. 根据 $U \uparrow G$ 的定义可知

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) + (V \uparrow G).$$

从而根据命题 21.7,

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus (V \uparrow G).$$

根据归纳假设可知 $V \uparrow G = (U_2 \uparrow G) \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow G)$, 因此, 根据 (2.10) 可知

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow G).$$

证毕.

根据上面的结论可以定义任意 $\mathbb{C}H$-模 U 的诱导模$U \uparrow G$(其中 U 不一定是 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模.)

21.9　定义

设 U 是一个 $\mathbb{C}H$-模. 则 (根据定理 8.7 与 10.5),

$$U \cong U_1 \oplus \ldots \oplus U_m,$$

其中 U_i 为 $\mathbb{C}H$ 的某些不可约 $\mathbb{C}H$-子模. 定义 $U \uparrow G$ 为下面的外直和:

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow G).$$

命题 21.6 与推论 21.8 保证了上述定义与定义 21.4 是一致的. 需要强调的是, 当 U 是 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模时, 上述定义中的诱导模 $U \uparrow G$ 即为

$$U \uparrow G = U(\mathbb{C}G).$$

当我们需要证明一些关于一般诱导模 $U \uparrow G$ 的结论时, 经常先处理 U 是 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模的特殊情况, 然后再利用下面的事实 (可以由定义 21.9 直接得出)

(21.10)　$$(U_1 \oplus \ldots \oplus U_m) \uparrow G \cong (U_1 \uparrow G) \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow G),$$

得到结论对于一般的诱导模 $U \uparrow G$ 也是成立的. 下面将证明关于诱导模的第一个重要性质——诱导的传递性.

21.11 定理

假设 H, K 是群 G 的子群, 且满足 $H \leqslant K \leqslant G$. 若 U 是一个 $\mathbb{C}H$-模, 则

$$(U \uparrow K) \uparrow G \cong U \uparrow G.$$

证明 首先假设 U 是 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模. 则 $U(\mathbb{C}K)$ 由下面的元素张成:

$$uk \quad (u \in U, k \in K).$$

从而 $(U(\mathbb{C}K))(\mathbb{C}G)$ 由下面的元素张成:

$$ukg \quad (u \in U, k \in K, g \in G).$$

由于 $K \leqslant G$, 则 $(U(\mathbb{C}K))(\mathbb{C}G) = U(\mathbb{C}G)$. 即

(21.12)
$$(U \uparrow K) \uparrow G = U \uparrow G.$$

现在假设 U 是任意的 $\mathbb{C}H$-模. 则

$$U \cong U_1 \oplus \ldots \oplus U_m,$$

其中 U_i 为 $\mathbb{C}H$ 的某些不可约 $\mathbb{C}H$-子模. 根据 (21.10) 可知

$$U \uparrow K \cong (U_1 \uparrow K) \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow K).$$

从而

$$\begin{aligned}(U \uparrow K) \uparrow G &\cong (U_1 \uparrow K) \uparrow G \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow K) \uparrow G \\ &= (U_1 \uparrow G) \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow G) \\ &\cong U \uparrow G.\end{aligned}$$

诱导特征标

21.13 定义

假设 ψ 是某个 $\mathbb{C}H$-模 U 的特征标, 则把诱导 $\mathbb{C}G$-模 $U \uparrow G$ 的特征标记为 $\psi \uparrow G$, 并将它称为由 ψ 诱导的特征标. 下面的例子说明了诱导特征标与特征标的限制之间的一个重要关系.

21.14 例子

假设 $G = S_5$, 且 H 为例 20.2 中出现的 G 的子群 A_4. 在例 19.16 中证明了若 $\chi_1, \ldots, \chi_7$ 为 G 的不可约特征标, $\psi_1, \ldots, \psi_4$ 为 H 的不可约特征标 (见 18.2), 则

$$\chi_1 \downarrow H = \psi_1, \quad \chi_2 \downarrow H = \psi_1,$$
$$\chi_3 \downarrow H = \psi_1 + \psi_4, \quad \chi_4 \downarrow H = \psi_1 + \psi_4,$$
$$\chi_5 \downarrow H = 2\psi_4, \quad \chi_6 \downarrow H = \psi_2 + \psi_3 + \psi_4, \quad \chi_7 \downarrow H = \psi_2 + \psi_3 + \psi_4.$$

根据定理 14.17, 等式右边的系数为 $\langle \chi_i \downarrow H, \psi_j \rangle_H$. 将这些系数用一个矩阵表示, 矩阵 ij-位置的值为 $\langle \chi_i \downarrow H, \psi_j \rangle_H$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

其中矩阵的行从上到下依次是 $\chi_1, \ldots, \chi_7$, 矩阵的列从左到右依次是 $\psi_1, \ldots, \psi_4$, 从矩阵中可以知道群 G 的一个不可约特征标在 H 上的限制是怎样的, 例如, 第三行的信息表示的是

$$\chi_3 \downarrow H = 1 \cdot \psi_1 + 0 \cdot \psi_2 + 0 \cdot \psi_3 + 1 \cdot \psi_4.$$

然而, 更重要的是, 矩阵的列信息告诉我们群 H 的一个不可约特征标在 G 上的诱导是怎样的. 具体来说, 矩阵第一列的七个整数表示的是

$$\psi_1 \uparrow G = 1 \cdot \chi_1 + 1 \cdot \chi_2 + 1 \cdot \chi_3 + 1 \cdot \chi_4 + 0 \cdot \chi_5 + 0 \cdot \chi_6 + 0 \cdot \chi_7.$$

同样地,

$$\psi_2 \uparrow G = \psi_3 \uparrow G = \chi_6 + \chi_7,$$

$$\psi_4 \uparrow G = \chi_3 + \chi_4 + 2\chi_5 + \chi_6 + \chi_7.$$

因此该矩阵 ij-位置上的值为 $\langle \chi_i \downarrow H, \psi_j \rangle_H$, 同时它也等于 $\langle \chi_i, \psi_j \uparrow G \rangle_G$. 事实上对于群 G 所有特征标 χ 的和群 H 的所有的特征标 ψ 都有关系 $\langle \chi \downarrow H, \psi \rangle_H = \langle \chi, \psi \uparrow G \rangle_G$ 成立, 我们将在下面的部分中证明该结论, 这个定理被称为 Frobenius 互反定理.

Frobenius 互反律

为了证明 Frobenius 互反律我们需要下面的结论.

21.15　命题

假设 $H \leqslant G$. 令 U 为 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模, 且 V 为 $\mathbb{C}G$ 的一个 $\mathbb{C}G$-子模. 则向量空间

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V) \text{与} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$$

的维数相等.

证明　假设 $\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$. 则根据推论 21.2, 存在一个元素 $r \in \mathbb{C}G$ 使得

$$s\vartheta = rs \quad \text{对于所有的} s \in U \uparrow G.$$

定义 $\overline{\vartheta}: U \to \mathbb{C}G$ 为 ϑ 在 U 上的限制, 即

$$u\overline{\vartheta} = ru \quad \text{对于所有的} u \in U.$$

从而 $\overline{\vartheta} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$. 因此函数

$$\vartheta \to \overline{\vartheta}$$

是从 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$ 的一个线性变换. 下面证明这个线性变换是可逆的. 假设 $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$. 则根据命题 21.1, 存在 $r \in \mathbb{C}G$ 使得对于所有的 $u \in U$ 有 $u\phi = ru$. 定义从 $U \uparrow G$ 到 $\mathbb{C}G$ 的函数 ϑ 为

$$s\vartheta = rs (s \in U \uparrow G).$$

则

$$\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V).$$

并且 $\phi = \overline{\vartheta}$. 从而函数 $\vartheta \to \overline{\vartheta}$ 是满射. 最后, 当存在 $r_1, r_2 \in \mathbb{C}G$ 使得对于所有的 $u \in U$ 有 $r_1 u = r_2 u$, 则对所有的 $s \in U \uparrow G$ 有 $r_1 s = r_2 s$, 因为 s 是 ug 的线性组合, 其中 $u \in U, g \in G$. 因此函数 $\vartheta \to \overline{\vartheta}$ 是单射, 从而它是从 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$ 的可逆线性变换, 则这两个线性空间维数相同. 证毕.

21.16　Frobenius 互反律

假设 $H \leqslant G, \chi, \psi$ 分别为 G 与 H 的特征标. 则

$$\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = \langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H.$$

证明　首先假设特征标 χ 与 ψ 均是不可约的. 则存在 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模 U 使得它的特征标为 ψ; 同样地, 存在 $\mathbb{C}G$ 的一个 $\mathbb{C}G$-子模 V 使得它的特征标为 χ. 根据定理 14.24 可知

$$\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)),$$

$$\langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)).$$

根据命题 21.15 可知

(21.17)
$$\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = \langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H.$$

即在特征标 χ 与 ψ 均是不可约的特殊情况下证明了结论成立. 现在考虑一般的情况, 假设 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 为 G 的不可约特征标, $\psi_1, \ldots, \psi_m$ 为 H 的不可约特征标. 则必存在整数 d_i, e_j 使得

$$\chi = \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_i \text{ 且 } \psi = \sum_{j=1}^{m} e_j \psi_j.$$

因此

$$\begin{aligned}
\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G &= \left\langle \sum_{j=1}^{m} e_j \psi_j \uparrow G, \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_i \right\rangle_G = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} e_j d_i \langle \psi_j \uparrow G, \chi_i \rangle_G \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} e_j d_i \langle \psi_j, \chi_i \downarrow H \rangle_H = \left\langle \sum_{j=1}^{m} e_j \psi_j, \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_i \downarrow H \right\rangle_H \\
&= \langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H.
\end{aligned}$$

证毕.

21.18　推论

若 f 是 G 上的类函数, 且 ψ 是 H 的特征标, 则

$$\langle \psi \uparrow G, f \rangle_G = \langle \psi, f \downarrow H \rangle_H.$$

证明　根据推论 15.4 与 Frobenius 互反律则可得结论成立. 证毕.

诱导特征标的值

现在我们论述如何求诱导特征标的值. 假设 ψ 是 G 的子群 H 的特征标, 为了叙述方便, 定义函数 $\dot{\psi}: G \to \mathbb{C}$ 为

$$\dot{\psi}(g) = \begin{cases} \psi(g), & \text{若 } g \in H, \\ 0, & \text{若 } g \notin H. \end{cases}$$

21.19　命题

对于所有的 $g \in G$, 诱导特征标$\psi \uparrow G$ 在 g 处的值为

$$(\psi \uparrow G)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \dot{\psi}(y^{-1} g y).$$

证明　设函数 $f: G \to \mathbb{C}$ 为

$$f(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \dot{\psi}(y^{-1} g y) \quad (g \in G).$$

下面证明 $f=\psi\uparrow G$. 若 $w\in G$, 则

$$f(w^{-1}gw)=\frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\dot{\psi}(y^{-1}w^{-1}gwy)=f(g).$$

从而 f 是一个类函数, 则根据推论 15.4 可知, 对于群 G 的所有不可约特征标 χ 有 $\langle f,\chi\rangle_G=\langle\psi\uparrow G,\chi\rangle_G$.

假设 χ 是群 G 的不可约特征标. 则

$$\begin{aligned}\langle f,\chi\rangle_G&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)\overline{\chi(g)}\\&=\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\sum_{y\in G}\dot{\psi}(y^{-1}gy)\overline{\chi(g)}.\end{aligned}$$

令 $x=y^{-1}gy$. 则

$$\begin{aligned}\langle f,\chi\rangle_G&=\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\dot{\psi}(x)\overline{\chi(yxy^{-1})}\\&=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in H}\psi(x)\overline{\chi(x)}.\end{aligned}$$

由于对于 $x\notin H$ 有 $\dot{\psi}(x)=0$, 且对于所有的 $y\in G$ 有 $\chi(yxy^{-1})=\chi(x)$. 则

$$\langle f,\chi\rangle_G=\langle\psi,\chi\downarrow H\rangle_H,$$

从而根据 Frobenius 互反律可知

$$\langle f,\chi\rangle_G=\langle\psi\uparrow G,\chi\rangle_G.$$

这就可以充分说明 $f=\psi\uparrow G$. 证毕.

21.20　推论

假设 ψ 是 G 的子群 H 的特征标, 则 $\psi\uparrow G$ 的次数为

$$(\psi\uparrow G)(1)=\frac{|G|}{|H|}\psi(1).$$

证明　根据命题 21.19 中的公式直接计算则可得 $(\psi\uparrow G)(1)$ 的值, 或者根据诱导模的定义也可以计算其结果 (见习题 21.3). 证毕.

在实际的计算, 往往并不用命题 21.19 中的公式求解诱导特征标的值, 而是用下面将要在命题 21.23 给出的一个更加实用的公式. 对于 $x\in G$, 定义群 G 上的类函数 f_x^G 为 (其中 $y\in G$)

$$f_x^G(y)=\begin{cases}1, & 若\ y\in x^G\\ 0, & 若 y\notin x^G\end{cases}\quad(y\in G)$$

则 f 是共轭类 x^G 的特征函数.

21.21　命题

假设 χ 是群 G 的特征标且 $x \in G$, 则

$$\langle \chi, f_x^G \rangle_G = \frac{\chi(x)}{|C_G(x)|}.$$

证明　根据定理 12.8 可知

$$\begin{aligned}\langle \chi, f_x^G \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) f_x^G(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in x^G} \chi(g) = \frac{|x^G|}{|G|} \chi(x) \\ &= \frac{\chi(x)}{|C_G(x)|}.\end{aligned}$$

证毕.

注意在证明定理 16.4 时用到了和命题 21.21 类似的结果. 假设 $H \leqslant G$ 且 $h \in H$ 则 $h^H \subseteq h^G$; 但是若 $g \in G$ 则 g^G 中可能包含 H 中的 $0, 1, 2$ 或者更多个共轭类. 换一种说法, 即为:

(21.22)　假设 $x \in G$.

(1) 若 x^G 中的每一个元素都不在 H 中, 则 $f_x^G \downarrow H = 0$.

(2) 若 H 包含 x^G 中的某些元素, 则存在 $x_1, \ldots, x_m \in H$ 使得

$$f_x^G \downarrow H = f_{x_1}^H + \ldots + f_{x_m}^H.$$

结论 (2) 说明 $H \cap x^G$ 可以被分成 m 个 H 的共轭类, 它们的代表元为 $x_1, \ldots, x_m$.

21.23　命题

假设 ψ 是 G 的子群 H 的特征标, 且 $x \in G$.

(1) 若 x^G 中的每一个元素都不在 H 中, 则 $(\psi \uparrow G)(x) = 0$.

(2) 若 H 包含 x^G 中的某些元素, 则

$$(\psi \uparrow G)(x) = |C_G(x)| \left(\frac{\psi(x_1)}{|C_H(x_1)|} + \ldots + \frac{\psi(x_m)}{|C_H(x_m)|} \right),$$

其中 $x_1, \ldots, x_m \in H$ 且 $f_x^G \downarrow H = f_{x_1}^H + \ldots + f_{x_m}^H$(如 (21.22)).

证明　根据命题 21.21 与推论 21.18 可知

$$\frac{(\psi \uparrow G)(x)}{|C_G(x)|} = \langle \psi \uparrow G, f_x^G \rangle_G = \langle \psi, f_x^G \downarrow H \rangle_H.$$

若 x^G 中的每一个元素都不在 H 中, 则 $f_x^G \downarrow H = 0$, 因此 $(\psi \uparrow G)(x) = 0$. 并且若 H 包含 x^G 中的某些元素, 且 $f_x^G \downarrow H = f_{x_1}^H + \ldots + f_{x_m}^H$ 就像在 (21.22)(2) 中的那样, 则

$$\begin{aligned}\frac{(\psi \uparrow G)(x)}{|C_G(x)|} &= \langle \psi, f_{x_1}^H + \ldots + f_{x_m}^H \rangle_H \\ &= \langle \psi, f_{x_1}^H \rangle_H + \ldots + \langle \psi, f_{x_m}^H \rangle_H \\ &= \frac{\psi(x_1)}{|C_H(x_1)|} + \ldots + \frac{\psi(x_m)}{|C_H(x_m)|}.\end{aligned}$$

证毕.

21.24 例题

假设 $G = S_4$ 且 $H = \langle a, b \rangle$, 其中

$$a = (1234), \quad b = (13).$$

则可知 $a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$, 从而 $H \cong D_8$. 根据 (12.12),H 的共轭类为

$$\{1\}, \quad \{a^2 = (13)(24)\}, \quad \{a = (1234), a^3 = (1432)\}, \quad \{b = (13), a^2b = (24)\},$$

因此

$$f_1^G \downarrow H = f_1^H, \quad f_{(13)}^G \downarrow H = f_{(13)}^H, \quad f_{(123)}^G \downarrow H = 0,$$

$$f_{(12)(34)}^G \downarrow H = f_{(13)(24)}^H + f_{(12)(34)}^H, \quad f_{(1234)}^G \downarrow H = f_{(1234)}^H.$$

例如, 结论

$$f_{(12)(34)}^G \downarrow H = f_{(13)(24)}^H + f_{(12)(34)}^H$$

表明 G-共轭类 $(12)(34)^G$ 恰好包含两个 H-共轭类, 它们的代表元分别为 (13)(24) 与 (12)(34). 下表给出了群 H 中元素的中心化子的阶数:

h	1	(13)(24)	(1234)	(13)	(12)(34)
$\lvert C_G(h)\rvert$	24	8	4	4	8
$\lvert C_H(h)\rvert$	8	8	4	4	4

假设 ψ 为群 H 的一个特征标. 则根据上表及命题 21.23 可知

$$(\psi \uparrow G)(1) = 24\frac{\psi(1)}{8},$$

$$(\psi \uparrow G)((13)) = 4\frac{\psi((13))}{4},$$

$$(\psi \uparrow G)((123)) = 0,$$

$$(\psi \uparrow G)((12)(34)) = 8\left(\frac{\psi((13)(24))}{8} + \frac{\psi((12)(34))}{4}\right),$$

$$(\psi \uparrow G)((1234)) = 4\frac{\psi((1234))}{4}.$$

结合例题 16.3(3) 中给出的 $H \cong D_8$ 的不可约特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_5$, 可知

	1	(13)(24)	(123)	(12)(34)	(1234)
$\chi_1 \uparrow G$	3	1	0	3	1
$\chi_2 \uparrow G$	3	-1	0	-1	1
$\chi_3 \uparrow G$	3	1	0	-1	-1
$\chi_4 \uparrow G$	3	-1	0	3	-1
$\chi_5 \uparrow G$	6	0	0	-2	0

在下面的例题中我们将运用诱导特征标来得到一个阶数为 21 的群的特征标表.

21.25　例子 (参见习题 17.2)

定义 S_7 中的置换 a, b 为

$$a = (1234567), \quad b = (235)(476),$$

并令 G 是 S_7 中由 a, b 生成的子群. 则通过验证可知

$$a^7 = b^3 = 1, \quad b^{-1}ab = a^2.$$

从而根据上述关系可知 G 中元素都可以表示为 $a^i b^j$ 的形式, 其中 $0 \leqslant i \leqslant 6, 0 \leqslant j \leqslant 2$. 则 G 是一个 21 阶群.

现在确定群 G 的特征标表. 第一步, 先确定它的共轭类. 由于 $\langle a \rangle \leqslant C_G(a)$, 7 整除 $|C_G(a)|$; 且 $b \notin C_G(a)$, $|C_G(a)| < 21$. 则 $|C_G(a)| = 7$, 同样地, 可知 $|C_G(b)| = 3$. 由此可以得到群 G 的共轭类为

$$\{1\}, \quad \{a, a^2, a^4\}, \quad \{a^3, a^5, a^6\},$$

$$\{a^i b : 0 \leqslant i \leqslant 6\}, \quad \{a^i b^2 : 0 \leqslant i \leqslant 6\}.$$

令 $1, a, a^3, b, b^2$ 为共轭类代表元. 由上面的分析可知 G 共有五个不可约特征标.

由于 $\langle a \rangle \lhd G$ 且 $G/\langle a \rangle \cong C_3$, 故可以通过对 $G/\langle a \rangle$ 的线性特征标进行提升得到群 G 的三个线性特征标 χ_1, χ_2, χ_3. 它们的值为 (其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$):

g	1	a	a^3	b	b^2
$\lvert C_G(g)\rvert$	21	7	7	3	3
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	1	ω^2	ω

假设 $H = \langle a \rangle$. 现在通过诱导 H 上的线性特征标来得到群 G 的最后两个不可约特征标. 令 $\eta = e^{2\pi i/7}$, 则存在群 H 的特征标 ψ_k(其中 $1 \leqslant k \leqslant 6$), 使得

$$\psi_k(a^j) = \eta^{jk} \quad (0 \leqslant j \leqslant 6).$$

为了使用命题 21.23 来计算 $\psi_k \uparrow G$, 注意到

$$f_a^G \downarrow H = f_a^H + f_{a^2}^H + f_{a^4}^H.$$

由于 a, a^2, a^4 在 H 中相互之间都不共轭, 根据命题 21.23, 可以得到

$$(\psi_1 \uparrow G)(a) = \eta + \eta^2 + \eta^4.$$

同样地, 可得

$$(\psi_1 \uparrow G)(a^3) = \eta^3 + \eta^5 + \eta^6, \quad (\psi_1 \uparrow G)(1) = 3.$$

并且由于 H 中不包含 b 与 b^2 的 G-共轭类中的任何元素, 从而可知

$$(\psi_1 \uparrow G)(b) = (\psi_1 \uparrow G)(b^2) = 0.$$

同样地, 可得

$$(\psi_3 \uparrow G)(1) = 3, \quad (\psi_3 \uparrow G)(a) = \eta^3 + \eta^5 + \eta^6,$$

$$(\psi_3 \uparrow G)(a^3) = \eta + \eta^2 + \eta^4, \quad (\psi_3 \uparrow G)(b) = (\psi_3 \uparrow G)(b^2) = 0.$$

因此, 若假设 $\chi_4 = \psi_1 \uparrow G, \chi_5 = \psi_3 \uparrow G$, 则 χ_4, χ_5 的值为

	1	a	a^3	b	b^2
χ_4	3	$\eta + \eta^2 + \eta^4$	$\eta^3 + \eta^5 + \eta^6$	0	0
χ_5	3	$\eta^3 + \eta^5 + \eta^6$	$\eta + \eta^2 + \eta^4$	0	0

由于 $\chi_4 \downarrow H = \psi_1 + \psi_2 + \psi_4, \chi_5 \downarrow H = \psi_3 + \psi_5 + \psi_6$, 且 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_6$ 线性无关, 故 χ_4 与 χ_5 不相等. 经计算可知 $\langle \chi_4, \chi_4 \rangle_G = \langle \chi_5, \chi_5 \rangle_G = 1$, 则可知 χ_4, χ_5 即为我们要找的最后两个不可约特征标. 从而群 G 的特征标表为

g	1	a	a^3	b	b^2
$\|C_G(g)\|$	21	7	7	3	3
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	$\eta+\eta^2+\eta^4$	$\eta^3+\eta^5+\eta^6$	0	0
χ_5	3	$\eta^3+\eta^5+\eta^6$	$\eta+\eta^2+\eta^4$	0	0

第 21 章总结

以下都假设 H 是 G 的子群.

1. 对于每一个 $\mathbb{C}H$-模 U 都可以定义它的诱导 $\mathbb{C}G$-模 $U\uparrow G$, 特别地, 当 U 是 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模时,$U\uparrow G$ 即为 $U(\mathbb{C}G)$.

2. 设 ψ 为 H 的一个特征标, 则它的诱导特征标的值为

$$(\psi\uparrow G)(g)=\frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\dot{\psi}(y^{-1}gy).$$

特别地, $\psi\uparrow G$ 的次数为 $(\psi\uparrow G)(1)=|G:H|\psi(1)$.

3. 若 g^G 中的每一个元素都不在 H 中, 则 $(\psi\uparrow G)(g)=0$. 若 H 包含 g^G 中的某些元素, 则

$$(\psi\uparrow G)(g)=|C_G(g)|\left(\frac{\psi(x_1)}{|C_H(x_1)|}+\ldots+\frac{\psi(x_m)}{|C_H(x_m)|}\right),$$

其中 $x_1,\ldots,x_m\in H$ 且 $f_x^G\downarrow H=f_{x_1}^H+\ldots+f_{x_m}^H$

4. Frobenius 互反律: 设 ψ,χ 分别为 H 与 G 的特征标, 则

$$\langle\psi\uparrow G,\chi\rangle_G=\langle\psi,\chi\downarrow H\rangle_H.$$

第 21 章习题

1. 令 $G=D_8=\langle a,b:a^4=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$ 且 $H=\langle a^2,b\rangle$. 假设 U 是 $\mathbb{C}H$ 中由 $1-a^2+b-a^2b$ 张成的一维子空间.

(a) 验证 U 是 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模.

(b) 寻找诱导 $\mathbb{C}G$-模 $U\uparrow G$ 的一组基.

(c) 写出 $\mathbb{C}H$-模 U 以及诱导 $\mathbb{C}G$-模 $U\uparrow G$ 的特征标, 并判断 $U\uparrow G$ 是否为不可约特征标.

2. 假设 $G=S_4$ 且 H 是它的一个子群 $\langle(123)\rangle\cong C_3$.

(a) 若 $\chi_1, \ldots \chi_5$ 是在 18.1 中给出的群 G 的不可约特征标, 试确定 $\chi_i (1 \leqslant i \leqslant 5)$ 在 H 上的限制 $\chi_i \downarrow H$, 并将它表示为 C_3 的不可约特征标 ψ_1, ψ_2, ψ_3 的和的形式.

(b) 将 $\psi_j \uparrow G (1 \leqslant j \leqslant 3)$ 表示为 G 的不可约特征标 χ_i 的和.

3. 假设 $H \leqslant G$ 且 ψ 是 H 的特征标, 试根据定义直接证明

$$(\psi \uparrow G)(1) = \frac{G}{|H|}\psi(1).$$

4. 假设 H 是 G 的子群, 且 ψ, χ 分别是 H 与 G 的特征标, 证明

$$(\psi(\chi \downarrow H)) \downarrow G = (\psi \uparrow G)\chi.$$

5. 假设 $G = S_7$ 且 $H = \langle a, b \rangle$, 其中

$$a = (1234567), \quad b = (235)(476).$$

就像在例 21.25 中给出的一样, 令 ϕ, ψ 是 H 的两个不可约特征标, 其值如下表 (其中 $\eta = e^{2\pi i/7}$):

g_i	1	a	a^3	b	b^2
$\|C_H(g_i)\|$	21	7	7	3	3
ϕ	1	1	1	1	1
ψ	3	$\eta + \eta^2 + \eta^4$	$\eta^3 + \eta^5 + \eta^6$	0	0

假设已知 $|C_G(a)| = 7, |C_G(b)| = 18$. 计算诱导特征标 $\phi \uparrow G$ 与 $\psi \uparrow G$ 的值.

6. 假设 H 是 G 的子群, 且 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ 是 G 的不可约特征标. 令 ψ 为 H 的一个不可约特征标. 则必存在整数 $d_1, \ldots, d_k$ 使得 $\psi \uparrow G = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k$, 证明 $d_1, \ldots, d_k$ 满足

$$\sum_{i=1}^{k} d_i^2 \leqslant |G : H|.$$

(把这个结果与命题 20.15 相比较)

7. 假设群 H 是群 G 的指数为 2 的正规子群, 且 ψ 为 H 的一个不可约特征标. 研究诱导特征标 $\psi \uparrow G$ 的性质, 并证明与第 20 章中的 G 的不可约特征标限制到 H 上的结论相类似的结果.

第22章 代数整数

在特征标的基本性质中, 也许最难理解的是一个有限群的不可约特征标的次数必能整除群的阶. 这将是我们在这章利用代数整数证明的结果之一. 本章中大多数结果与特征标取值的算术性质有关. 我们讨论 G 中使得任意的 G 的特征标 χ, 满足 $\chi(g)$ 为整数的元素 $g \in G$ 的性质. 并且证明一些有用的同余性质; 比如, 若 p 是一个素数, $g \in G$ 是一个阶为 p^r 的元素, 那么对 G 的任意的特征标 χ 有 $\chi(g) \equiv \chi(1) \mod p$, 其中 $\chi(g)$ 是一个整数.

代数整数

22.1 定义

一个复数 λ 是一个代数整数当且仅当 λ 是某个整数矩阵的特征值.

这样因为 λ 是一个代数整数, 我们要求对某个整数矩阵 A 有

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

等价地, 对同一个矩阵 A, 有 $\mu A = \lambda\mu$, 其中 μ 是某个非零行向量.

我们得到 λ 是一个代数整数, 当且仅当 λ 是形为

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

的多项式的一个根, 其中 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ 为整数 (参见习题 22.7). 实际上代数整数通常以这种方式定义.

22.2 例子

(1) 每个整数 n 都是一个代数整数, 因为 n 是 1×1 矩阵 (n) 的特征值.

(2) $\sqrt{2}$ 是一个代数整数, 因为它是矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值.

(3) λ 是一个代数整数, 那么 $-\lambda$ 和 $\overline{\lambda}$ 也是代数整数. 因为如果 A 是一个整数矩阵, $u = 0$ 是一个行向量, 使得 $uA = \lambda u$, 那么

$$u(-A) = (-\lambda)u \text{ 且 } \bar{\mu}A = \overline{\lambda}\bar{\mu},$$

其中 $\overline{u}$ 是 u 的每个元素取共轭得到的.

(4) 令 A 为下面给定的 $n\times n$ 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

假设 ω 是一个 n 次单位根, 令 u 是行向量 $(1,\omega,\omega^2,\dots,\omega^{n-1})$. 那么

$$uA=(\omega,\omega^2,\dots,\omega^{n-1},1)=\omega u.$$

这说明每个 n 次单位根都是一个代数整数.

22.3 定理

若 λ 和 μ 是代数整数那么 $\lambda\mu$ 与 $\lambda+\mu$ 也是代数整数.

证明 存在整数方阵 A 和 B, 非零向量 u 和 v, 使得 $uA=\lambda u, vB=\mu v$. 假设 A 是 $m\times m$ 矩阵, B 为 $n\times n$ 矩阵.

令 $e_1,\dots,e_m$ 为 $\mathbb{C}^m$ 的一组基,$f_1,\dots,f_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组基. 那么向量 $e_i\otimes f_j(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$ 是张量积空间 $V=\mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^n$ 的一组基. 定义 V 上的自同态 $A\otimes B$ 为

$$(e_i\otimes f_j)(A\otimes B)=e_iA\otimes f_jB\quad(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$$

的线性扩展 (也就是, $(\sum\lambda_{ij}(e_i\otimes f_j))(A\otimes B)=\sum\lambda_{ij}(e_iA\otimes f_jB)$). 如同命题 19.4 中的证明一样, 很容易验证对任意的向量 $x\in\mathbb{C}^m, y\in\mathbb{C}^n$, 有

$$(x\otimes y)(A\otimes B)=xA\otimes yB$$

成立. 因此

$$(u\otimes v)(A\otimes B)=uA\otimes vB=\lambda u\otimes\mu v=\lambda\mu(u\otimes v).$$

所以 $\lambda\mu$ 是 $A\otimes B$ 的特征值. 因为 $A\otimes B$ 相对于基 $e_i\otimes f_j(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$ 的矩阵的元素都是整数, 所以 $\lambda\mu$ 是一个代数整数.

令 I_m 和 I_n 分别为 $m\times m$ 和 $n\times n$ 的单位矩阵. 那么

$$\begin{aligned}(u\otimes v)(A\otimes I_n+I_m\otimes B)&=uA\otimes vI_n+uI_m\otimes vB\\&=\lambda u\otimes v+u\otimes\mu v\\&=(\lambda+\mu)(u\otimes v),\end{aligned}$$

所以与上面类似, 可以推出 $\lambda+\mu$ 是一个代数整数. 证毕.

定理 22.3 说明所有的代数整数组成的集合可看作 $\mathbb{C}$ 的一个子环. 接下来的结果说明了代数整数与特征标之间的关系.

22.4　推论

若 χ 是 G 的一个特征标, 且 $g\in G$, 那么 $\chi(g)$ 是一个代数整数.

证明　由命题 13.9, $\chi(g)$ 是单位根之和. 由例 22.2(4) 知, 每个单位根都是一个代数整数, 由定理 22.3, 任意的单位根之和都是代数整数. 因此 $\chi(g)$ 是一个代数整数. 证毕.

22.5　命题

若 λ 既是有理数又是代数整数, 那么 λ 是一个整数.

证明　假设 λ 是有理数, 但不是整数. 我们将说明 λ 不是一个代数整数, 这样足以证明这个命题.

记 $\lambda=r/s$, 其中 r 和 s 为互素的整数, 且 $s\neq\pm1$. 令 p 为整除 s 的一个素数. 对任意的 $n\times n$ 的整数矩阵 A, $sA-rI$ 非对角元素可以被 s 整除, 因此也可以被 p 整除. 所以存在整数 m 使得

$$\det(sA-rI)=(-r)^n+mp$$

成立. 因为 p 不能整除 r(因为 r,s 互素), 可以推出 $\det(sA-rI)\neq0$. 所以

$$\det(A-\lambda I)=\left(\frac{1}{s}\right)^n\det(sA-rI)\neq0,$$

因此 λ 不是一个代数整数. 证毕.

接下来的结果是由推论 22.4 和命题 22.5 直接可以推出的.

22.6　推论

令 χ 是 G 的一个特征标, 且 $g\in G$. 若 $\chi(g)$ 是一个有理数, 那么 $\chi(g)$ 是一个整数.

作为命题 22.5 的一种特殊情况, $\sqrt{2}$ 是无理数是最好的一个例子 (例 22.2(2) 说明 $\sqrt{2}$ 是一个代数整数).

不可约特征标的次数整除 $|G|$

为了证明 $|G|$ 能被每个不可约特征标的次数整除, 建立两个基本引理. 从定义

12.21 知, 若 C 是 G 的一个共轭类, 那么

$$\overline{C} = \sum_{x \in C} x \in \mathbb{C}G.$$

22.7　引理

假设 $g \in G$, 且 C 是 G 中包含 g 的共轭类. 令 U 是一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模, 特征标为 χ. 那么

$$u\overline{C} = \lambda u \quad \text{对任意的} u \in U,$$

其中

$$\lambda = \frac{|G|}{|C_G(g)|}\frac{\chi(g)}{\chi(1)}.$$

证明　由于 $\overline{C}$ 在 $\mathbb{C}G$ 的中心 (参见命题 12.22), 从命题 9.14 可知, 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得对任意的 $u \in U$ 有 $u\overline{C} = \lambda u$ 成立; 即

$$u\sum_{x \in C} x = \lambda u \quad \text{对的任意的} u \in U.$$

因此, 如果 $\mathscr{B}$ 是 U 的一组基, 那么

$$\sum_{x \in C} [x]_{\mathscr{B}} = \lambda I.$$

等式两边取迹得

$$\sum_{x \in C} \chi(x) = \lambda\chi(1),$$

并且因为 χ 在共轭类 C 上取值为常数, 所以

$$|C|\chi(g) = \lambda\chi(1).$$

所以 $\lambda = |C|\chi(g)/\chi(1)$. 又根据定理 12.8 知 $|C| = |G : C_G(g)|$, 结果得证. 证毕.

22.8　引理

令 $r = \sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{C}G$, 其中每个 a_g 都是一个整数. 假设 u 是 $\mathbb{C}G$ 中使得

$$ur = \lambda u$$

成立的一个非零元, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$. 那么 λ 是一个代数整数.

证明 令 $g_1, \ldots, g_n$ 为 G 的元素. 那么对 $1 \leqslant i \leqslant n$, 存在整数 a_{ij}, 使得

$$g_i r = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j$$

成立 (实际上, $a_{ij} = a_g$ 其中 $g = g_i^{-1} g_j$). 等式 $ur = \lambda u$ $(u \neq 0)$ 说明 λ 是整数矩阵 $A = (a_{ij})$ 的一个特征值. 所以 λ 是一个代数整数. 证毕.

22.9 例子

令 $G = C_n = \langle x : x^n = 1 \rangle$, 并定义

$$u = 1 + \omega x^{-1} + \omega^2 x^{-2} + \ldots + \omega^{n-1} x \in \mathbb{C}G,$$

其中 ω 为 n 次单位根. 那么

$$ux = \omega u,$$

且利用引理 22.8 证明了 ω 是一个代数整数.

注意到这个例子只是例 22.2(4) 一个重现.

22.10 推论

若 χ 是 G 的一个不可约特征标, 且 $g \in G$, 那么

$$\lambda = \frac{|G|}{|C_G(g)|} \frac{\chi(g)}{\chi(1)}$$

是一个代数整数.

证明 令 U 是特征标为 χ 的模 $\mathbb{C}G$ 的一个不可约的 $\mathbb{C}G$-子模, 令 $\overline{C}$ 是 G 的包含 g 的共轭类中的元素的和. 那么由引理 22.7 得到对于所有的 $u \in U$, 有 $u\overline{C} = \lambda u$. 因此由引理 22.8 我们知道 λ 是一个代数整数. 证毕.

22.11 定理

如果 χ 是 G 的一个不可约的特征标, 那么 $\chi(1)$ 整除 $|G|$.

证明 令 $g_1, \ldots, g_k$ 为 G 的共轭类的代表元. 根据推论 22.10 与 22.4, 对任意的 i,

$$\frac{|G|}{|C_G(g_i)|} \frac{\chi(g_i)}{\chi(1)} \text{ 与 } \overline{\chi(g_i)}$$

都是代数整数. 因此根据定理 22.3,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{|G|}{|C_G(g_i)|} \frac{\chi(g_i)\overline{\chi(g_i)}}{\chi(1)}$$

是一个代数整数. 根据行正交关系, 和定理 16.4(1), 这个代数整数等于 $|G|/\chi(1)$. 由于 $|G|/\chi(1)$ 是一个有理数, 由命题 22.5, 说明 $|G|/\chi(1)$ 是一个整数. 也就是 $\chi(1)$ 整除 $|G|$. 证毕.

22.12　例子

(1) 若 p 是一个素数, 对某个 n, G 是一个阶为 p^n 的群, 那么对 G 的所有不可约特征标 χ, 有 $\chi(1)$ 是 p 的一个幂次.

特别地, 若 $|G| = p^2$, 那么对 G 的所有不可约特征标 χ, 有 $\chi(1) = 1$ (因为不可约特征标次数的平方和等于 $|G|$, 所以 $\chi(1) < p$). 因此利用命题 9.18, 可以得到众所周知的结果, p^2 阶群是交换群.

(2) 令 G 是一个阶为 $2p$ 的群, 其中 p 是一个素数. 根据定理 22.11, G 的不可约特征标次数是 1 或者 2(它不可能是 p 理由同 (1)). 根据定理 17.11, G 的线性特征标的个数整除 $|G|$. 因此 G 的不可约特征标次数都是 1, 或者它们是

$$1, 1, 2, \ldots, 2,$$

其中次数为 2 的有 $(p-1)/2$ 个.

(3) 若 $G = S_n$, 那么每个整除 G 的一个不可约特征标次数的素数 p, 也整除 $n!$, 因此满足 $p \leqslant n$.

定理 22.11 也有下面关于单群的不可约特征标的有趣的结果 (若群除了 $\{1\}$ 与 G 本身没有其他的正规子群, 则 G 是单群).

22.13　推论

单群没有次数为 2 的不可约特征标.

证明　假设 G 为单群, 有一个次数为 2 的不可约特征标 χ. 令 $\rho: G \to GL(2, \mathbb{C})$ 是特征标为 χ 的 G 的表示. 由于 $\mathrm{Ker}\rho \lhd G$ 和 G 为单群, 有 $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$, 所以 ρ 是单射.

首先, 由命题 9.5 知, G 是非交换的. 因此 $G' \neq \{1\}$, 而 G 为单群, 所以 $G' = G$. 根据定理 17.11, G 没有非平凡线性特征标. 但 $g \mapsto \det(g\rho)$ 是 G 的一个线性特征标 (参见习题 13.7(a)), 这说明对任意的 $g \in G$ 有

$$\det(g\rho) = 1$$

成立.

根据定理 22.11, G 为偶数阶. 所以 G 包含一个阶为 2 的元素 x(参见习题 1.8).

考虑 2×2 矩阵 $x\rho$. 由于 ρ 是单射, 所以 $x\rho$ 阶为 2; 根据命题 9.11, 存在一个 2×2 矩阵 T 使得 $T^{-1}(x\rho)T$ 为对角阵, 且对角线元素为 ± 1. 由于 $\det(x\rho) = 1$, 那么有

$$T^{-1}(x\rho)T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

这样

$$x\rho = T(-I)T^{-1} = -I.$$

因此对任意的 $g \in G$ 有 $(x\rho)(g\rho) = (g\rho)(x\rho)$. 由于 ρ 是单射, 这也就意味着对任意的 $g \in G$ 有 $xg = gx$, 故 $\langle x \rangle \lhd G$. 而 G 为单群, 矛盾. 证毕.

接下来的结果将会再次说明特征标的次数可以用来研究一个群的结构. 这次, 假设 G 的任意不可约特征标次数为一个素数 p 的幂次, 并且可以推出 G 有一个交换的 p-补 N; 也就是, N 是 G 的正规交换子群, 且 $|N|$ 与 p 互素, 而 $|G:N|$ 是 p 的幂次.

22.14　推论

假设 p 是一个素数, 且 G 的任意不可约特征标的次数是 p 的幂次. 那么 G 有一个交换的正规 p-补. 特别地, G 不是单群除非 G 为素数阶.

证明　若 G 是交换的, 则结论正确 (参见定理 9.6),① **对于任意的 $|G|$ 的因子 r 都有 r 阶子群, 这是因为我们总可以把交换群写成循环群直积的形式, 并且以循环群的阶的任意因子为阶的子群都存在. 又因为交换群的任意子群都是正规子群, 所以交换群 G 的任意阶的子群全存在并且都是正规交换子群. 因为 G 的每个不可约特征标的次数是 p 的幂次, 为了找 p-补我们分两种情况讨论: 如果 $|G| = p^i$, 那么取 $N = \{1\}$ 即可; 如果 $|G| = kp^i, (k,p) = 1, k \neq 1$, 那么取任意的 k 阶子群 N 都可以作为 p-补.** 所以假设 G 是非交换的. 由定理 11.12 和 17.11 可以得到方程

$$|G| = |G/G'| + \sum \chi(1)^2,$$

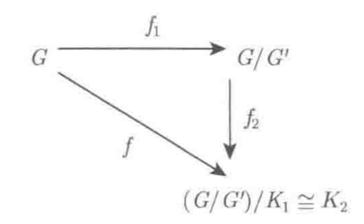
其中和是 G 的 $x(1)$ >1 的不可约特征标 x 之和.

因为 G 是非交换的, 存在 G 中某些不可约特征标满足 $\chi(1) > 1$. 根据假设, 那么 $\chi(1)$ 可以被 p 整除, 根据定理 22.11, p 可以整除 $|G|$; 并且从上述方程可推出, p 整除交换群 G/G' 的阶. 因为任意的有限交换群均同构于循环群的直积, 所以 G/G' 有一个指数为 p 的子群. 因此 G 有一个指数为 p 的正规子群 H.② **下面说明如何找到这个 H. 假设 G/G' 的指数为 p 的子群为 K_1, 那么得到下面的图:**

---

① 黑体部分为译者补充的证明过程以便读者阅读.

② 黑体部分为译者补充的证明过程以便读者阅读.



其中 f_1 是从 G 到 G/G' 的自然满同态, f_2 是从 G/G' 到 $(G/G')/K_1$ 的自然满同态, 那么上图表示存在从 G 到 K_2 的一个满同态 f 使得 $G/\mathrm{Ker}f \cong K_2$. 所以很显然 $\mathrm{Ker}f$ 就是我们要找的 H.

令 ψ 为 H 的一个不可约特征标. 根据命题 20.4, 存在 G 的某个不可约特征标 χ[①] 使得 $\langle \chi \downarrow H, \psi \rangle \neq 0$. 接下来, Clifford 定理 20.8 说明 $\psi(1)$ 整除 $\chi(1)$, 所以 $\psi(1)$ 是 p 的幂次. 现在通过对 $|G|$ 做归纳, 假设 H 有一个交换的正规 p-补 N.[②]**归纳思想为: 假设 G 的子群 H 有一个正规的交换 p-补 N, 我们证明 G 有一个正规交换 p-补, 并说明它就是 N. 交换显然, 首先证明 N 是 G 的一个 p-补, 再来证明 N 是 G 的一个正规子群.** 因为 $|N|$ 与 p 互素, 且 $|G:N|$ 是 p 的幂次, 所以只要证明 $N \lhd G$ 即可.

假设 $g \in G$, 且 g 的阶与 p 互素. 那么 $g \in H$, 否则有 p 整除 gH 的阶, 反过来推出 p 整除 g 的阶;[③]**我们有 gH 的阶整除 g 的阶, 这是因为假设 g 的阶是 m, 那么 $(gH)^m = g^m H = H$, 所以 gH 的阶整除 m.** 类似地推出 $g \in N$. 因此 N 是由 G 中那些阶与 p 互素的元素组成的. 且基于这个事实容易说明 $N \lhd G$.

最后, 假设 G 为单群, 所以 $N = \{1\}$ 或 $N = G$. 若 $N = \{1\}$, 则 G 是一个 p-群, 所以 $Z(G) \neq \{1\}$(参见习题 12.7); 因为 G 为单群, 有 $Z(G) = G$, 所以 G 是交换的. 另一方面, 若 $N = G$, 那么 G 依然是交换群. 但根据习题 1.1, 交换的单群为素数阶. 所以 G 为素数阶. 证毕.

使 $\chi(g)$ 为整数的一个条件

对一个元素 $g \in G$, 下面的定理 22.16 给出了使得 G 的任意的特征标 χ 满足 $\chi(g)$ 是整数的群理论条件. 举个例子, 这个结果说明, 对任意的 n, S_n 的特征标表中的元素都是整数 (参见推论 22.17). 鉴于我们在对较小的 n 构造 S_n 的特征标表时所遇到的困难 (在例 19.17 中我们计算过 $n = 6$), 定理 22.16 明显是一个很有用的结果.

① 原书为“some irreducible character ψ of H”, 译者修正为“G 的某个不可约特征标 χ”.
② 黑体部分为译者补充的证明过程以便读者阅读.
③ 黑体部分为译者补充的证明过程以便读者阅读.

在证明定理 22.16 之前, 我们需要一个针对单位根的引理. 若 a 和 b 是正整数, 那么记它们的最大公因数为 (a,b). 并对整数 d 和 n, 记 $d|n$ 为 d 能整除 n.

22.15　引理

若 ω 是一个 n 次单位根, 那么

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ (i,n)=1}} \omega^i$$

是一个整数.

证明　通过对 n 归纳来证明这个结论. 对 $n=1$ 是平凡的, 且若 $\omega=1$ 结论也是显然的. 所以假设 ω 是 n 次单位根且 $w\neq 1$. 那么 ω 是多项式 $(x^n-1)/(x-1)=x^{n-1}+\ldots+x+1$ 的根. 所以 $\sum_{i=1}^{n}\omega^i=0$.

现在把和 $\sum_{i=1}^{n} w^i$ 按照 i 和 n 的最大公因数 d 分开:

$$0=\sum_{i=1}^{n}\omega^i=\sum_{d|n}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ (i,n)=d}}\omega^i=\sum_{d|n}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n/d\\ (j,n/d)=1}}\omega^{dj}.$$

如果 $d|n$, 那么 ω^d 是 (n/d) 次单位根, 且在条件 $d>1$ 下, 那么根据归纳假设,

$$\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n/d\\ (j,n/d)=1}}\omega^{dj}\in\mathbb{Z}.$$

有

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ (i,n)=1}}\omega^i=\sum_{i=1}^{n}\omega^i-\sum_{\substack{d|n\\ d>1}}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n/d\\ (j,n/d)=1}}\omega^{dj}\in\mathbb{Z}$$

成立. 证毕.

22.16　定理

令 g 是 G 的 n 阶元. 假设对任意满足 $1\leqslant i\leqslant n$ 且 $(i,n)=1$ 的 i 有 g 与 g^i 共轭. 那么对 G 中的任意特征标 χ, $\chi(g)$ 是一个整数.

证明　令 V 是具有 m 次特征标 χ 的一个 $\mathbb{C}G$-模. 根据命题 9.11, 存在 V 的一组基 $\mathscr{B}$ 使得

$$[g]_{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}\omega_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_m\end{pmatrix},$$

其中 $\omega_1,\ldots,\omega_n$ 是 n 次单位根. 对 $1\leqslant i\leqslant n$, 矩阵 $[g^i]_{\mathscr{B}}$ 对角线元素为 $\omega_1^i,\ldots,\omega_m^i$, 所以

$$\chi(g^i)=\omega_1^i+\ldots+\omega_m^i.$$

根据引理 22.15,

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\(i,n)=1}}\chi(g^i)\in\mathbb{Z}.$$

而当 $1\leqslant i\leqslant n$ 且 $(i,n)=1$ 时, g 与 g^i 共轭, 所以对每个这样的 i 有 $\chi(g^i)=\chi(g)$, 因此 $s\chi(g)\in\mathbb{Z}$, 其中 s 是满足 $1\leqslant i\leqslant n$ 且 $(i,n)=1$ 的整数 i 的个数. 因此 $\chi(g)$ 是有理数, 且根据推论 22.6, $\chi(g)$ 是一个整数. 证毕.

我们要指出, 利用伽罗瓦理论可以证明定理 22.16 的逆定理, 也就是, 若对 G 中任意的特征标 χ 有 $\chi(g)\in\mathbb{Z}$①, 那么当 i 与 n 互素时, g 与 g^i 共轭.

22.17 推论

S_n的特征标取值为整数.

证明 若 $g\in S_n$ 且 i 与 g 的阶互素, 那么置换 g 与 g^i 有相同的轮换型, 根据定理 12.15, 它们是共轭的. 再根据定理 22.16 结论得证. 证毕.

群元素的 p'-部分

这章的剩余部分主要讲特征标值的一些重要的同余性质. 举个例子, 我们的结论中一个特别有用的结果, 若 p 是一个素数, g 是 G 中一个阶为 p^r 的元素, r 为整数, 且 χ 是 G 中使得 $\chi(g)\in\mathbb{Z}$ 一个特征标, 那么 $\chi(g)\equiv\chi(1) \bmod p$.

在进入特征标理论之前, 需要定义一个群元素的 p'-部分. 这个定义有下面的引理产生.

22.18 引理

令 p 是一个素数, 且 $g\in G$. 那么存在 $x,y\in G$ 使

(1) $g=xy=yx$,

(2) x 的阶是 p 的某个幂次, 且

(3) y 的阶与 p 互素.

此外,G 中满足条件 (1)-(3) 的元素 x 和 y 是唯一的.

证明 令 g 的阶为 up^v, 其中 $u,v\in\mathbb{Z}$ 且 $(u,p)=1$. 那么存在整数 a,b 使得 $au+bp^v=1$. 取 $x=g^{au},y=g^{bp^v}$. 那么

① 原书为“$\chi(g^i)\in\mathbb{Z}$”, 译者修正为“$\chi(g)\in\mathbb{Z}$”.

$$xy = yx = g^{au+bp^v} = g, \quad x^{p^v} = g^{aup^v} = 1, \quad y^u = g^{bup^v} = 1.$$

因此 x 的阶是 p 的幂次, y 的阶整除 u, 与 p 互素. 所以 x, y 满足条件 (1)-(3).

现在假设 $x', y' \in G$, 且满足 (1)-(3); 也就是 $g = x'y' = y'x'$ 且 x' 的阶是 p 的幂次, y' 的阶与 p 互素. 我们需要证明是 $x = x', y = y'$.

有

$$x'g = x'y'x' = gx',$$

所以 x' 与 g 是可交换的, 同时也与 $g^{au} = x$ 可交换. 由于 x 和 x' 的阶均为 p 的幂次, 所以 $x^{-1}x'$ 的阶也为 p 的幂次. 类似地, y' 与 y 交换, 且 $y(y')^{-1}$ 的阶与 p 互素. 最后, $xy = g = x'y'$, 所以

$$x^{-1}x' = y(y')^{-1}.$$

若 $z = x^{-1}x' = y(y')^{-1}$, 那么我们得到 z 的阶是 p 的幂次, 同时与 p 互素. 所以 $z = 1$, 所以 $x = x', y = y'$. 证毕.

22.19　定义

我们称引理 22.18 中的元素 y 为 g 的 p'-部分.

我们从引理 22.18 的证明中提取出如下陈述.

(22.20)　令 g 的阶为 up^v, 其中 $u, v \in \mathbb{Z}$, 且 $(u, p) = 1$, 取整数 a, b 使得 $au + bp^v = 1$. 那么 g 的 p'-部分是 g^{bp^v}.

举个例子, 若 $p = 2$ 且 g 的阶为 6, 那么 g 的 p'-部分是 g^{-2}; 引理 22.18 中的表达式 $g = xy$ 中 $x = g^3, y = g^{-2}$.

一点环理论

为特征标值的同余性质的主要结论做准备, 需要 $\mathbb{C}$ 的一些子环的基本结论, 我们所有的特征标值都位于子环中.

令 n 是一个正整数, $\zeta = e^{2\pi i/n}$. 定义 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 为 $\mathbb{C}$ 的由 $\mathbb{Z}$ 和 ζ 生成的子环. 也就是

$$\mathbb{Z}[\zeta] = \{f(\zeta) : f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}.$$

显然, $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中的每个元素都是幂函数 $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$ 的整系数线性组合, 所以实际上

$$\mathbb{Z}[\zeta] = \{f(\zeta) : f(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{且次数} \leqslant n-1\}.$$

现在设 p 是一个素数, 令 $p\mathbb{Z}[\zeta] = \{pr : r \in \mathbb{Z}[\zeta]\}$, $\mathbb{Z}[\zeta]$ 的一个主理想.

22.21　命题

$\mathbb{Z}[\zeta]$ 中仅有有限个理想 I 包含 $p\mathbb{Z}[\zeta]$.

证明　考虑商环 $\mathbb{Z}[\zeta]/p\mathbb{Z}[\zeta]$. 根据定义, 商环中的元素为所有陪集 $p\mathbb{Z}[\zeta]+r$, 其中 $r \in \mathbb{Z}[\zeta]$. 每个这样的陪集都包含

$$a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_{n-1}\zeta^{n-1}$$

形式的元素, 其中 $a_i \in \mathbb{Z}$, 对任意的 i,$0 \leqslant a_i \leqslant p-1$. 由于仅有有限个这样的元素, 可以得出 $\mathbb{Z}[\zeta]/p\mathbb{Z}[\zeta]$ 是有限的, $\mathbb{Z}[\zeta]$ 的包含 $p\mathbb{Z}[\zeta]$ 的理想与 $\mathbb{Z}[\zeta]/p\mathbb{Z}[\zeta]$ 的理想是一一对应 (对应关系是 $I \to I/p\mathbb{Z}[\zeta]$). 所以这样的理想只有有限个. 证毕.

从命题 22.21 可以推出, $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中存在一个包含 $p\mathbb{Z}[\zeta]$ 的极大理想P; 也就是, P 是一个真理想, 且 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 没有更大的真理想能包含它. ($\mathbb{Z}[\zeta]$ 中的真理想是不等于 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 的理想).

现在证明极大理想 P 的两个简单的结果.

22.22　命题

若 $r, s \in \mathbb{Z}[\zeta]$ 且 $rs \in P$, 那么 $r \in P$ 或 $s \in P$. 特别地, 如果存在正整数 n 使得 $r^n \in P$, 那么 $r \in P$.

证明　假设 $rs \in P$ 且 $r \notin P$. 则需要说明 $s \in P$.

因为 $r \notin P$, $\mathbb{Z}[\zeta]$ 的理想 $r\mathbb{Z}[\zeta] + P$ 严格包含 P. 而 P 是极大理想, 所以

$$r\mathbb{Z}[\zeta] + P = \mathbb{Z}[\zeta].$$

因此, 存在 $a \in \mathbb{Z}[\zeta], b \in P$ 使得 $1 = ra + b$. 那么 $s = rsa + sb$. 由于 $rs \in P, b \in P$, 所以 $s \in P$.

至于命题的最后一部分, 假设 $r^n \in P$. 因为 $r^n = rr^{n-1}$, 这说明 $r \in P$ 或 $r^{n-1} \in P$. 依次重复下去, 可以得出 $r \in P$. 证毕.

22.23　命题

我们有 $P \cap \mathbb{Z} = P\mathbb{Z}$.

证明　令 $m \in P \cap \mathbb{Z}$, 若 $p \nmid m$, 那么存在整数 a, b 使得 $am + bp = 1$; 但是这意味着 $1 \in P$ 是错误的, 因为 $P \neq \mathbb{Z}[\zeta]$. 因此 $p \mid m$, 表明 $P \cap \mathbb{Z} \subseteq P\mathbb{Z}$. 因为 $p \in P$, 得到 $p\mathbb{Z} \subseteq P \cap \mathbb{Z}$. 证毕.

同　　余

最后我们将证明关于特征标值同余的结论. 令 G 是阶为 n 的群, $\zeta = e^{2\pi i/n}$. 因为 G 的所有特征标取值都位于 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中 (参见命题 9.11), 环 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 是很有意思的. 同前面一样, 令 p 是一个素数, P 是 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中包含 $p\mathbb{Z}[\zeta]$ 的一个极大理想.

22.24　命题

令 $g \in G$, y 是 g 的 p'-部分. 若 χ 是 G 的任意特征标, 那么 $\chi(g) - \chi(y) \in P$.

证明　假设 g 的阶为 $m = up^v$, 其中 $u, v \in \mathbb{Z}$ 且 $(u, p) = 1$. 取整数 a, b 使得 $au + bp^v = 1$. 那么 $y = g^{bp^v}$(参见 (22.20)).

g 和 y 的阶均整除 $n = |G|$, 所以 $\chi(g)$ 和 $\chi(y)$ 都是 n 次单位根的和, 都在 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中.

现设 ω 为 m 次单位根 (因为 $m \mid n$, 所以 $\omega \in \mathbb{Z}[\zeta]$). 那么 $\omega = \omega^{au+bp^v}$, 且

$$\omega^{p^v} = \omega^{aup^v} \cdot \omega^{bp^{2v}} = \omega^{bp^{2v}}.$$

考虑 $(\omega - \omega^{bp^v})^{p^v}$. 根据二项式定理,

$$(\omega - \omega^{bp^v})^{p^v} = \omega^{p^v} - p^v \omega^{p^v-1} \omega^{bp^v} + \ldots \pm C_{p^v}^r \omega^{p^v-r} \omega^{rbp^v} + \ldots + (-1)^{p^v} \omega^{bp^{2v}}①.$$

对 $0 < r < p^v$, 二项式系数 $C_{p^v}^r$ 可以被 p 整除. 因此

$$(\omega - \omega^{bp^v})^{p^v} = \omega^{p^v} + (-1)^{p^v} \omega^{bp^{2v}} + pa,$$

其中 $a \in \mathbb{Z}[\zeta]$. 另外, 因为 $\omega^{p^v} = \omega^{bp^{2v}}$, 有

$$\omega^{p^v} + (-1)^{p^v} \omega^{bp^{2v}} = \begin{cases} 0, & 若\ p \neq 2, \\ 2\omega^{p^v}, & 若\ p = 2, \end{cases}$$

所以

$$(\omega - \omega^{bp^v}) \in p\mathbb{Z}[\zeta].$$

这样 $(\omega - \omega^{bp^v})^{p^v}$ 在极大理想 P 中. 应用命题 22.22 使得

① 原书为“$\omega^{p^{v-1}}$”, 译者修正为“ω^{p^v-1}”; 原书为“$\omega^{p^{v-r}}$”, 译者修正为“ω^{p^v-r}”.

(22.25)

$$(\omega - \omega^{bp^v})^{p^v} \in P.$$

根据命题 9.11, 存在 m 次单位根 $\omega_1, \ldots, \omega_d$ 使得

$$\chi(g) = \omega_1 + \ldots + \omega_d \text{ 且 } \chi(y) = \omega_1^{bp^v} \ldots + \omega_d^{bp^v}.$$

那么根据 (22.25),

$$\chi(g) - \chi(y) = (\omega_1 - \omega_1^{bp^v}) + \ldots + (\omega_d - \omega_d^{bp^v})$$

在 P 中. 证毕.

22.26 推论

令 p 为一个素数, 假设 $g \in G$ 且 y 是 g 的 p'-部分. 若 χ 是 G 中使得 $\chi(g)$ 和 $\chi(y)$ 为整数的特征标. 那么 $\chi(g) \equiv \chi(y) \mod p$.

证明　由于 $\chi(g)$ 和 $\chi(y)$ 都是整数, 由定理 22.24 和命题 22.23 有 $\chi(g)-\chi(y) \in P \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. 所以 $\chi(g) \equiv \chi(y) \bmod p$. 证毕.

22.27 推论

令 p 为一个素数, 假设 $g \in G$ 且 g 的阶为 p 的幂次. 若 χ 是 G 中使得 $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ 的特征标. 那么 $\chi(g) \equiv \chi(1) \mod p$.

证明　因为 g 的阶为 p 的幂次, 那么 g 的 p'-部分为 1, 所以结果可以由推论 22.26 直接推出. 证毕.

推论 13.10 是推论 22.27 的特殊情况, 其中 g 为 2 阶.

我们将在第 25-27 章有关特征标的计算中广泛使用结果 22.24-22.27. 现在参考我们已知的特征标表来阐述结论.

22.28 例子

例 20.14 已经给出了 A_5 的特征标表. 其中 $\alpha = (1+\sqrt{5})/2, \beta = (1-\sqrt{5})/2$.

	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	1	0	-1	-1
χ_3	5	-1	1	0	0
χ_4	3	0	-1	α	β
χ_5	3	0	-1	β	α

若 $g=(123)$, 那么推论 22.26 说明当 $\chi(g)\in\mathbb{Z}$ 时,$\chi(g)\equiv\chi(1) \bmod 3$. 那么特征标表的第一列与第二列的元素是模 3 同余的, 通过观察特征标表我们也可以看出来. 类似地, 第一列与第三列的元素是模 2 同余. 而

$$\chi_i((12345))\equiv\chi_i(1) \bmod 5,\quad i=1,2,3.$$

然而, $\chi_4((12345))=\alpha\notin\mathbb{Z}$. 我们将对这个值来例证定理 22.24. 如果取 $p=5, g=(12345)$, 那么 g 的 p'-部分为 1, 且

$$\begin{aligned}\chi_4(g)-\chi_4(1)&=\alpha-3=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}-6)\\&=\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})=\beta\sqrt{5}.\end{aligned}$$

取 $\zeta=e^{2\pi i/60}$, 令 P 是 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 的包含 $5\mathbb{Z}[\zeta]$ 一个极大理想. 那么 $(\sqrt{5})^2\in P$, 所以根据命题 22.22, $\sqrt{5}\in P$. 因为 $\beta\in\mathbb{Z}[\zeta]$(参见命题 9.11), 有 $\beta\sqrt{5}\in P$. 也就是 $\chi_4(g)-\chi_4(1)\in P$. 这也就说明了定理 22.24.

第 22 章总结

1. 特征标值为代数整数.

2. G 的每个不可约特征标次数整除 $|G|$.

3. 如果对任意的与 g 的阶互素的 i, g 与 g^i 共轭, 那么对任意的特征标 χ, $\chi(g)$ 是一个整数.

4. 令 p 是一个素数. 如果 $g\in G$ 且 y 是 g 的 p'-部分. 那么对 G 中任意使得 $\chi(g)$ 和 $\chi(y)$ 为整数的特征标 χ, 有 $\chi(g)\equiv\chi(y) \bmod p$.

第 22 章习题

1. 令 G 是一个 15 阶群. 利用定理 11.12, 17.11 和 22.11 说明 G 的每个不可约特征标的次数均为 1. 并推出 G 是交换群.

2. 证明 16 阶群的共轭类个数为 7,10 或 16.

3. 令 p,q 为素数,$p>q$, 令 G 是一个阶为 pq 的非交换群.

(a) 找出 G 的所有不可约特征标的次数.

(b) 说明 $|G'|=p$.

(c) 说明 q 整除 $p-1$, 且 G 有 $q+((p-1)/q)$ 个共轭类.

4. 令 G 为一个群, ϕ 是 G 的一个特征标, 对 G 中任意的非单位元 g 和 h 有 $\phi(g)=\phi(h)$.

(a) 说明存在 $a,b\in\mathbb{C}$ 使得 $\phi=a1_G+b\chi_{\text{reg}}$.

(b) 说明 $a+b$ 和 $a+b|G|$ 是整数.

(c) 说明若 χ 是 G 的一个非平凡的不可约特征标, 那么 $b\chi(1)$ 是一个整数.

(d) 推出 a 和 b 是整数.

5. 假设 G 是奇阶群, 这个习题说明使得 $\chi=\overline{\chi}$ 成立的唯一的不可约特征标是平凡特征标.

(a) 证明若 $g\in G$ 且 $g=g^{-1}$, 那么 $g=1$.

(b) 现在令 χ 是 G 的不可约特征标, $\chi=\overline{\chi}$. 证明 $\langle\chi,1_G\rangle=\dfrac{1}{|G|}(\chi(1)+2\alpha)$, 其中 α 是一个代数整数.

(c) 推出 $\chi=1_G$.

6. 通常可以通过群 G 的算术信息计算出它的特征标表. 这个习题以 $G=S_5$ 为例说明了这一点.

一个 120 阶的群 G 恰有 7 个共轭类, 且包含一个 5 阶元素 g 且使得 $|C_G(g)|=5$. 此外, g,g^2, g^3 和 g^4 在 G 中共轭.

(a) 说明对 G 的任意的不可约特征标 χ 来说 $\chi(g)$ 为 0,1 或 -1.

(b) 利用推论 22.27 推出 G 有两个次数为 5 的不可约特征标.

(c) 对 G 的所有的不可约特征标 χ, 找出 $\chi(1)$ 和 $\chi(g)$.

(d) 已知 G 的特征标表中的所有元素为整数, 且给 G 的共轭类代表元的阶数和中心化子的阶如下所示:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
g_i 的阶数	1	2	2	3	4	6	5
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	120	12	8	6	4	6	5

利用推论 22.26 和列正交关系, 给出 G 的特征标表.

7. 证明复数 λ 是一个代数整数当且仅当 λ 是形为

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

的多项式的一个根, 其中 $a_r(0\leqslant r\leqslant n-1)$ 为整数.

第23章　实　表　示

从第 9 章开始, 我们就总是把表示放在复数域 $\mathbb{C}$ 上考虑了. 然而, 表示理论在实数域 $\mathbb{R}$ 上也有很好的结果. 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的表示和实数域 $\mathbb{R}$ 上的表示之间, 存在一个微妙的相互作用关系, 这就是我们要在这一章中研究的内容.

通常情况下, $\mathbb{C}G$-模的特征标是实值的, 这一章的第一个主要的结果就是讨论了 G 的实值不可约的特征标的数量.

令 ρ 是 G 的一个表示. 如果所有的矩阵 $g\rho(g \in G)$ 中的元素全是实值的, 那么显然 ρ 的特征标是实值的. 然而, 反过来是不成立的, 可以有这种情况, ρ 的特征标是实值的, 但是没有与 ρ 等价的表示 σ 使得矩阵 $g\sigma$ 的所有的元素都是实值的. 关于一个特征标是否对应着 $\mathbb{R}$ 上的一个表示这个问题的不同的判断方法使我们得到了一个重要的结果 ——Frobenius-Schur 对合元计数原理. 这个用来在本章最后一节中证明 Brauer 和 Fowler 的关于有限单群中的对合元的中心化子的一个重要的结果.

虽然本章在论述中包含了大量的特征标表的计算和特征标理论的应用, 相对于余下几章的内容来说可能有些深入, 并且在余下几章中用不到. 然而, 实表示理论不仅是有趣的, 结果漂亮的, 而且给了我们关于特征标的很好的信息, 使得这在更复杂的计算中发挥着重要的作用.

实 特 征 标

有限群 G 的一个元素 g 叫做实的当且仅当 g 和 g^{-1} 是共轭的. 如果 g 是实的, 那么共轭类 g^G 叫做实的. 注意到如果一个共轭类是实的, 那么它包含它中每个元素的逆, 这是因为 $(g^{-1})^G = \{x^{-1} : x \in g^G\}$.

另一方面, G 的一个特征标 χ 是实的当且仅当对于所有的 $g \in G$ 来说 $\chi(g)$ 是实的. 例如, G 的共轭类 $\{1\}$ 是实的, G 的平凡特征标是实的.

23.1　定理

G 的不可约的实特征标的数量等于 G 的实共轭类的数量.

证明　令 X 是 G 的特征标表, 令 $\overline{X}$ 是矩阵 X 的复共轭.

对于 G 的每个不可约特征标 χ 来说, 复共轭 $\overline{\chi}$ 也是一个不可约的特征标 (见命题 13.15), 所以 $\overline{X}$ 可以通过对 X 进行行变换得到. 因此, 存在一个置换阵 P 使

得

$$PX = \overline{X}$$

(见习题 4.4).

对于 G 的每个共轭类 g^G 来说, 在 X 中对应着 g^G 的一列元素是对应着 $(g^{-1})^G$ 一列元素的复共轭. 因此 $\overline{X}$ 可以通过对 X 进行列变换得到, 所以存在一个置换阵 Q 使得

$$XQ = \overline{X}.$$

由命题 16.2 我们知道 X 是可逆的. 因此

$$Q = X^{-1}\overline{X} = X^{-1}PX.$$

因此由命题 13.2 我们知道 P 和 Q 有相同的迹. 因为一个置换阵的迹等于相应置换固定的点的数量, 我们有 G 的不可约实值特征标的数量等于 $\mathrm{tr}(P)$, G 的实值共轭类的数量等于 $\mathrm{tr}(Q)$.

所以 G 的不可约实值特征标的数量等于 G 的实值共轭类的数量. 证毕.

下面的推论的部分是由与习题 22.5 中的方法不同的另一种方法得到.

23.2　推论

群 G 有一个非平凡的不可约实特征标当且仅当 G 的阶是偶数.

证明　如果 G 的阶是奇数, 那么不存在 G 的非单位元是实值的 (见习题 23.1). 因此由定理 23.1 我们知道 G 的唯一一个实特征标是平凡特征标.

如果 G 的阶是偶数, 那么由习题 1.8 我们知道 G 有一个 2 阶的元素 g. 因此 G 至少有两个实值共轭类 $\{1\}$ 和 g^G, 因此由定理 23.1 我们知道群 G 至少有两个不可约的实特征标. 证毕.

在 $\mathbb{R}$ 上可以实现的特征标

令 χ 是群 G 的一个特征标. 如果存在一个特征标为 χ 的表示 $\rho: G \to GL(n, \mathbb{C})$ 使得每个矩阵 $g\rho(g \in G)$ 的所有的元素都是实数, 那么就说 χ 可以在 $\mathbb{R}$ 上实现. 这种说法与下面的说法是等价的, 存在某个特征标为 χ 的 $\mathbb{C}G$-模 V 和 V 的一组基 $v_1, ..., v_n$, 使得对于所有的 $g \in G$ 和 $1 \leqslant i \leqslant n$, 有 $v_i g$ 是 $v_1, ..., v_n$ 的一个实系数的线性组合.

23.3　例子

(1) 令 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, 令 χ 是群 G 的次数为 2 的

一个不可约特征标 (见例 16.3(3)). 那么 χ 在 $\mathbb{R}$ 上可以实现, 因为

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

给出了特征标为 χ 的 G 的一个表示 ρ 使得每个矩阵 $g\rho(g \in G)$ 的所有的元素都是实数.

(2) 令 $G = Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, 令 χ 是群 G 的次数为 2 的一个不可约特征标 (见例 17.1). χ 的值如下:

	1	a^2	a	b	ab
χ	2	-2	0	0	0

因此 χ 是实的. 事实上, χ 不可以在 $\mathbb{R}$ 上实现, 但是现在还不能清楚地证明这个结论 (我们将会在随后的例 23.18(3) 中证明这个结论).

虽然每个可以在 $\mathbb{R}$ 上实现的特征标一定是实特征标, 但例 23.3(2) 告诉我们反过来是不成立的.

$\mathbb{R}G$-模

回忆在第 4 章中定义的一个 $\mathbb{F}G$-模, 其中 $F = \mathbb{R}$ 或 $F = \mathbb{C}$. 因此一个 $\mathbb{R}G$-模是赋予了乘法的 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间, 并且 G 中的元素满足定义 4.2 的条件. 在这一节中将会研究 $\mathbb{R}G$-模和 $\mathbb{C}G$-模之间的关系.

23.4 例子

令 V 是 $\mathbb{R}$ 上的一个二维的向量空间, 基是 v_1, v_2.

(1) 如果如下定义, 那么 V 变成一个 $\mathbb{R}D_8$-模:

$$v_1a = v_2, \quad v_1b = -v_1,$$
$$v_2a = -v_1, \quad v_2b = v_2$$

(与例 23.3(1) 相比较).

(2) 如果如下定义, 那么 V 变成一个 $\mathbb{R}C_3$-模, 其中 $C_3 = \langle x : x^3 = 1 \rangle$:

$$v_1x = v_2,$$
$$v_2x = -v_1 - v_2$$

(这个给出了习题 3.2 中的表示 $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$).

每个 $\mathbb{R}G$-模可以很容易地转化成一个 $\mathbb{C}G$-模. 只需要取 $\mathbb{R}G$-模的一组基 $v_1, ..., v_n$, 考虑基为 $v_1, ..., v_n$ 的 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 这个新的向量空间显然是个 $\mathbb{C}G$-模 ($v_i g$ 的定义不变). 根据表示我们很容易理解这个构造方式, 如果 $\rho : G \to GL(n, \mathbb{R})$ 是一个表示, 那么对于所有的 $g \in G$, 矩阵 $g\rho(g \in G)$ 的所有的元素都在 $\mathbb{R}$ 中, 因此在 $\mathbb{C}$ 中. 所以得到了一个表示 $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$. 注意到 G 的一个特征标 χ 可以在 $\mathbb{R}$ 上实现当且仅当存在一个特征标为 χ 的 $\mathbb{R}G$-模.

而由一个给定的 $\mathbb{C}G$-模建立一个 $\mathbb{R}G$-模的构造方法如下. 令 V 是基为 $v_1, ..., v_n$ 的一个 $\mathbb{C}G$-模, 令 $g \in G$. 存在复数 z_{jk} 使得

$$v_j g = \sum_{k=1}^{n} z_{jk} v_k \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

现在令 $V_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 其基为

$$v_1, ..., v_n, iv_1, ..., iv_n.$$

记 $z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}$, 其中 $x_{jk}, y_{jk} \in \mathbb{R}$. 如下定义 $V_{\mathbb{R}}$ 中的元素与 g 的一个乘法:

(23.5)

$$v_j g = \sum_{k=1}^{n} (x_{jk} v_k + y_{jk}(iv_k)), \quad (iv_j)g = \sum_{k=1}^{n} (-y_{jk} v_k + x_{jk}(iv_k)) \quad (1 \leqslant j \leqslant n);$$

并且线性地定义 $vg(v \in V_{\mathbb{R}})$. 用这种方法定义了 $vg(v \in V_{\mathbb{R}}), g \in G$. 把 v_j 当成 $\mathbb{C}G$-模 V 中的一个元素, 有

$$(v_j g)h = v_j(gh), \quad g, h \in G, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

很容易地看到, 如果把 v_j 和 iv_j 看成 $V_{\mathbb{R}}$ 中的元素, 有

$$(v_j g)h = v_j(gh), ((iv_j)g)h = (iv_j)(gh).$$

因此应用命题 4.6, 我们看到了 (23.5) 把 $V_{\mathbb{R}}$ 变成了一个 $\mathbb{R}G$-模.

如果 χ 是 V 的一个特征标, 那么

$$\chi(g) = \sum_{k=1}^{n} z_{kk}.$$

$V_{\mathbb{R}}$ 的特征标, 在 g 上的值是

$$2\sum_{k=1}^{n} x_{kk} = \chi(g) + \overline{\chi(g)}.$$

因此 $V_{\mathbb{R}}$ 的特征标是 $\chi + \overline{\chi}$.

我们把 $V_{\mathbb{R}}$ 的基本的性质总结成下面的这个命题.

23.6　命题

令 V 是一个特征标为 χ 的 $\mathbb{C}G$-模.

(1) $\mathbb{R}G$-模 $V_{\mathbb{R}}$ 的特征标是 $\chi+\overline{\chi}$; 特别地, $\dim V_{\mathbb{R}}=2\dim V$.

(2) 如果 V 是一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模并且 $V_{\mathbb{R}}$ 是一个可约的 $\mathbb{R}G$-模, 那么 χ 在 $\mathbb{R}$ 上可以实现.

证明　我们已经证明了第 (1) 部分.

在第 (2) 部分, 假设 V 是一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模并且 $V_{\mathbb{R}}$ 是一个可约的 $\mathbb{R}G$-模. 那么由 (1) 我们知道 $V_{\mathbb{R}}=U\oplus W$, 其中 U 是一个特征标为 χ 的 $\mathbb{R}G$-模, W 是一个特征标为 $\overline{\chi}$ 的 $\mathbb{R}G$-模. 因此, 存在一个特征标为 χ 的 $\mathbb{R}G$-模 U, 所以 χ 在 $\mathbb{R}$ 上可以实现. 证毕.

23.7　例子

(1) 令 $G=C_3=\langle x:x^3=1\rangle$, 令 V 是一个基为 v_1 的 1 维的 $\mathbb{C}G$-模使得

$$v_1x=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})v_1$$

(注意到 $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})=e^{2\pi i/3}$). 那么 $V_{\mathbb{R}}$ 的基为 v_1, iv_1, 并且在这组基下, x 可以由下面矩阵表示:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) 令 $G=D_8=\langle a,b:a^4=b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$, 令 V 是一个基为 v_1, v_2 的 2 维的 $\mathbb{C}G$-模使得

$$v_1a=iv_1,\quad v_1b=v_2,$$

$$v_2a=-iv_2,\quad v_2b=v_1.$$

那么 $V_{\mathbb{R}}$ 的基为 v_1,v_2,v_3,v_4, 其中 $v_3=iv_1, v_4=iv_2$. 在这组基下得到表示 ρ, 其中

$$a\rho=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad b\rho=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 v_1+v_4 和 v_2+v_3 张成的 $V_{\mathbb{R}}$ 的子空间是一个 $\mathbb{R}G$-子模. 因此由命题 23.6(2) 得到 V 的特征标在 $\mathbb{R}$ 上可以实现. 事实上, 我们在例 23.3(1) 中已经知道了这个结果.

双 线 性 型

一个特征标在 $\mathbb{R}$ 上是否可以实现的问题可以与相应的 $\mathbb{C}G$-模上的某个双线性型是否存在的问题联系在一起.

令 V 是 F 上的一个向量空间, 其中 $F=\mathbb{R}$ 或 $F=\mathbb{C}$. V 上的一个双线性型 β 是一个函数, 它把由 V 中的向量组成的每个有序对 (u,v) 映成了 F 中的一个元素 $\beta(u,v)$, 并且对于所有的 $u,v,u_1,u_2,v_1,v_2\in V,\lambda_1,\lambda_2\in F$, 满足下面的条件:

$$\beta(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,v)=\lambda_1\beta(u_1,v)+\lambda_2\beta(u_2,v),$$

$$\beta(u,\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)=\lambda_1\beta(u,v_1)+\lambda_2\beta(u,v_2)$$

(因此对于固定的 u,v 来说, 函数 $x\mapsto\beta(x,v)$ 和 $y\mapsto\beta(u,y)$ 都是线性的, 所以叫做双线性).

如果对于所有的 $u,v\in V$ 来说, 下面的式子成立, 那么就说双线性型 β 是对称的:

$$\beta(u,v)=\beta(v,u).$$

如果对于所有的 $u,v\in V$ 来说, 下面的式子成立, 那么就说双线性型 β 是斜对称的:

$$\beta(u,v)=-\beta(v,u).$$

如果 V 是一个 $\mathbb{F}G$-模, 并且对于所有的 $u,v\in V,g\in G$ 来说下面的式子成立, 那么就说 V 上的一个双线性型 β 是 G-不变的:

$$\beta(ug,vg)=\beta(u,v).$$

下一个结果表明了每个 $\mathbb{R}G$-模有一个具有正定性质的 G-不变对称的双线性型. $\mathbb{C}G$-模的一个相似的结果已经在习题 8.6 中给出了.

23.8 定理

如果 V 是一个 $\mathbb{R}G$-模, 那么存在 V 上的一个 G-不变对称的双线性型 β 使得对于所有的 V 中的非零元 v 来说有下式成立:

$$\beta(v,v)>0.$$

证明 令 $v_1,...,v_n$ 是 V 的一组基. 对于 $u=\sum_{j=1}^{n}\lambda_jv_j,v=\sum_{j=1}^{n}\mu_jv_j\in V$ 来说, 其中 $\lambda_j,\mu_j\in\bar{\mathbb{R}}$, 如下定义

$$\gamma(u,v)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mu_j.$$

那么 γ 是 V 上的一个对称的双线性型. 更进一步地, 对于 V 中的非零元 v 来说, 有下式成立:

$$\gamma(v,v)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j^2>0.$$

现在令

$$\beta(u,v)=\sum_{x\in G}\gamma(ux,vx)\quad (u,v\in V).$$

因此, β 是 V 上的一个对称的双线性型, 并且对于所有的 V 中的非零元 v 来说有 $\beta(v,v)>0$.

如果 $g\in G$, 那么随着 x 跑遍了 G, gx 跑遍了 G, 因此

$$\beta(ug,vg)=\sum_{x\in G}\gamma(ugx,vgx)=\beta(u,v).$$

因此 β 是 G-不变的. 证毕.

23.9　命题

如果 V 是一个 $\mathbb{R}G$-模, 令 β 是 V 上的一个 G-不变双线性型. 如果 U 是 V 的一个 $\mathbb{R}G$-子模, 那么 W 是 V 的一个 $\mathbb{R}G$-子模, 其中

$$W=\{w\in V:\beta(u,w)=0,\quad \forall u\in U\}.$$

证明　很容易地得到 W 是 V 的一个子空间. 现在令 $w\in W, g\in G$. 那么对于所有的 $u\in U$ 来说, 有 $ug^{-1}\in U$, 所以

$$\beta(u,wg)=\beta(ug^{-1},wgg^{-1})=\beta(ug^{-1},w)=0.$$

因此 $wg\in W$, 所以 W 是 V 的一个 $\mathbb{R}G$-子模. 证毕.

23.10　命题

假设 β 是 $\mathbb{R}G$-模 V 上的一个 G-不变对称的双线性型, 并且存在 $u,v\in V$ 使得 $\beta(u,u)>0, \beta(v,v)<0$. 那么 V 是一个可约的 $\mathbb{R}G$-模.

证明　定理 23.8 告诉我们有一个 V 上的 G-不变对称的双线性型 β_1 使得对于所有的 V 中的非零元 w 来说有

$$\beta_1(w,w)>0.$$

由双线性型上的一个一般的结果 (见习题 23.7) 我们知道存在 V 的一组基 $v_1,\ldots,v_n$ 使得在 $i\neq j$ 的情况下有

$$\beta_1(v_i,v_j)=\beta(v_i,v_j)=0,$$

并且有

$$\beta_1(v_i, v_i) = 1, \quad \forall i,$$

$$\beta(v_1, v_1) > 0,$$

$$\beta(v_2, v_2) < 0.$$

令 $\beta(v_1, v_1) = x$, 如下定义 γ:

$$\gamma(u, v) = \beta_1(u, v) - \frac{1}{x}\beta(u, v) \quad (u, v \in V).$$

因为 β 和 β_1 是 V 上的 G-不变对称的双线性型, 所以 γ 也是. 但是对于所有的 $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V(\lambda_i \in \mathbb{R})$, 有

$$\gamma(v, v_1) = \lambda_1 \gamma(v_1, v_1) = 0.$$

因此, 如果定义

$$W = \{w \in V : \gamma(v, w) = 0, \quad \forall v \in V\},$$

那么由命题 23.9 我们知道 W 是 V 的一个非零的 $\mathbb{R}G$-子模. 更进一步地,

$$\gamma(v_2, v_2) = 1 - \frac{1}{x}\beta(v_2, v_2) > 0,$$

所以 $W \neq V$. 因此 V 是一个可约的 $\mathbb{R}G$-模. 证毕.

我们现在可以把一个给定的 G 的特征标在 $\mathbb{R}$ 上是否可以实现的问题与双线性型问题联系在一起.

23.11 定理

令 χ 是 G 的一个不可约的特征标. 下面两个条件是等价的:

(1) χ 可以在 $\mathbb{R}$ 上实现;

(2) 存在一个特征标为 χ 的 $\mathbb{C}G$-模 V 和一个 V 上的非零的 G-不变对称的双线性形式.

证明 首先证明 (2) 推出 (1). 令 V 是一个特征标为 χ 的 $\mathbb{C}G$-模, 假设 β 是 V 上的非零的 G-不变对称的双线性型. 存在 $u, v \in V$ 使得 $\beta(u, v) = \beta(v, u) \neq 0$. 因为

$$\beta(u + v, u + v) = \beta(u, u) + \beta(v, v) + 2\beta(u, v),$$

存在 $w \in V$ 使得 $\beta(w, w) \neq 0$. 令 $\beta(w, w) = z, v_1 = z^{-\frac{1}{2}}w$. 那么

$$\beta(v_1, v_1) = 1.$$

把 v_1 扩充成 V 的一组基 $v_1, .., v_n$. 那么 $v_1, ..., v_n, iv_1, ..., iv_n$ 是 $\mathbb{R}G$-模 $V_\mathbb{R}$ 的一组基.

如下定义从 $V_\mathbb{R}$ 到 V 的一个函数 ϑ:

$$\vartheta : \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j + \sum_{j=1}^{n} \mu_j (iv_j) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + i\mu_j) v_j \quad (\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}).$$

那么 ϑ 是一个双射, 并且对于所有的 $w_1, w_2, v \in V_\mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, g \in G$, 有

(23.12) $$(w_1 + w_2)\vartheta = w_1\vartheta + w_2\vartheta, \quad (\lambda v)\vartheta = \lambda(v\vartheta), \quad (vg)\vartheta = (v\vartheta)g.$$

现在如下定义 $V_\mathbb{R}$ 中的元素组成的有序对上的一个函数 $\widetilde{\beta}$:

$$\widetilde{\beta}(u, v) = \mathrm{Re}(\beta(u\vartheta, v\vartheta)) \quad (u, v \in V_\mathbb{R}).$$

其中 Re 是取实部. 由 (23.12), 很容易地验证 $\widetilde{\beta}$ 是 $V_\mathbb{R}$ 上的一个 G- 不变对称的双线性型. 注意到

$$\widetilde{\beta}(v_1, v_1) = 1, \quad \widetilde{\beta}(iv_1, iv_1) = -1.$$

因此由命题 23.10 我们知道 $V_\mathbb{R}$ 是一个可约的 $\mathbb{R}G$-模. 那么由命题 23.6(2) 我们知道 χ 可以在 $\mathbb{R}$ 上实现. 所以我们证明了定理中的 (2) 推出 (1) 部分.

另一方面, 假设 χ 可以在 $\mathbb{R}$ 上实现, 令 U 是特征标为 χ 的一个 $\mathbb{R}G$-模. 由定理 23.8 知道存在 U 上的一个非零的 G-不变对称的双线性型 γ. 令 $u_1, ..., u_n$ 是 U 的一组基, 令 V 是 $\mathbb{C}$ 上的基为 $u_1, ..., u_n$ 的向量空间. 像之前所说的那样, V 是一个 $\mathbb{C}G$-模 (其中 $u_i g$ 的定义与在 U 中的定义一样). 如下定义 V 上的函数 $\widetilde{\gamma}$:

$$\widetilde{\gamma}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j \mu_k \gamma(u_j, u_k),$$

其中 $\lambda_i, \mu_k \in \mathbb{C}$. 那么 $\widetilde{\gamma}$ 是 $\mathbb{C}G$-模 V 上的一个非零的 G-不变对称的双线性型, 并且 V 的特征标是 χ. 因此证明了定理中的 (1) 推出 (2) 部分. 证毕.

指 标 函 数

现在给 G 的每个不可约的特征标 χ 赋予一个数字, 叫做 χ 的指标, 它的值为 0,1 或 -1. 将在后面的内容中看到这个数字告诉我们 χ 是否可以在 $\mathbb{R}$ 上实现.

注意到

$$\langle \chi^2, 1_G \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\chi(g) = \langle \chi, \overline{\chi} \rangle.$$

因此, 对于不可约的特征标 χ 来说, 有

$$\langle \chi^2, 1_G \rangle = \begin{cases} 0, & \chi \text{ 不是实的;} \\ 1, & \chi \text{ 是实的.} \end{cases}$$

令 V 是特征标为 χ 的一个 $\mathbb{C}G$-模. 回忆在第 19 章中我们知道 χ^2 是 $\mathbb{C}G$-模 $V \otimes V$ 的特征标, 并且有

$$\chi^2 = \chi_S + \chi_A,$$

其中 χ_S 是 $V \otimes V$ 的对称部分的特征标, χ_A 是 $V \otimes V$ 的反对称部分的特征标. 因此如果 $\langle \chi^2, 1_G \rangle = 1$, 那么 χ_S 和 χ_A 中有且仅有一个的成分中有 1_G.

23.13　定义

如果 χ 是 G 的一个不可约的特征标, 那么如下定义 χ 的指标 $\iota\chi$:

$$\iota\chi = \begin{cases} 0, & 1_G \text{ ① 不是 } \chi_S \text{ 或 } \chi_A \text{ 的成分;} \\ 1, & 1_G \text{ 是 } \chi_S \text{ 的一个成分;} \\ -1, & 1_G \text{ 是 } \chi_A \text{ 的一个成分.} \end{cases}$$

把 ι 叫做 G 的不可约的特征标组成的集合上的指标函数. 注意到 $\iota\chi \neq 0$ 当且仅当 χ 是实的.

如果把指标函数和群 G 的内部的结构联系起来的话, 那么下面的一个结果给出了指标函数的一个重要的性质.

23.14　定理

对于所有的 $x \in G$,

$$\sum_{\chi} (\iota\chi)\chi(x) = |\{y \in G : y^2 = x\}|,$$

其中和是在 G 的所有不可约的特征标上进行的.

证明　如下定义一个函数 $\vartheta : G \to \mathbb{C}$

$$\vartheta(x) = |\{y \in G : y^2 = x\}| \quad (x \in G).$$

注意到 ϑ 是 G 上的一个类函数, 因为对于所有的 $g \in G$, 有

$$y^2 = x \Leftrightarrow (g^{-1}yg)^2 = g^{-1}xg.$$

因此由推论 15.4 有 ϑ 是 G 的不可约的特征标的一个线性组合.

① 原书为"χ is not a constituent of χ_S or χ_A", 译者修正为"1_G 不是 χ_S 或 χ_A 的成分".

由 $\iota\chi$ 的定义我们知道

$$\begin{aligned}\iota\chi &= \langle \chi_S - \chi_A, 1_G \rangle \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\sum_{g\in G:g^2=x}\chi(g^2) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\vartheta(x)\chi(x) \\ &= \langle \vartheta, \chi \rangle.\end{aligned}$$

因此 $\vartheta = \sum(\iota\chi)\chi$. 证毕.

23.15　例子

$G = S_3$ 的特征标表如下:

	1	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	−1	1
χ_3	2	0	−1

应用命题 19.14 我们计算得到, 对于 G 的每个不可约的特征标 χ 来说有 $\iota\chi = 1$, 所以 $\sum(\iota\chi)\chi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$, 它的值如下表:

	1	(12)	(123)
$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3$	4	0	1

结合定理 23.14 可以确定 G 中有 4 个元素平方是 1, 分别是 1,(12),(13) 和 (23); 没有平方是 (12) 的元素; 平方是 (123) 的元素有一个, 是 (132).

回到实数上的实现问题中来

现在在双线性型的基础上把指标函数和之前的知识联系起来. 有了这个, 就可以说明一个不可约的特征标的指标决定了它是否可以在 $\mathbb{R}$ 上实现, 并推出 Frobenius-Schur 对合元计数原理.

23.16 定理

令 V 是特征标为 χ 的一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模.

(1) 存在 V 上的非零的 G-不变双线性型当且仅当 $\iota\chi \neq 0$.

(2) 存在 V 上的非零的 G-不变的对称的双线性型当且仅当 $\iota\chi = 1$.

(3) 存在 V 上的非零的 G-不变的斜对称的双线性型当且仅当 $\iota\chi = -1$.

证明 在这个定理的证明中把 $\mathbb{C}$ 当成 $\mathbb{C}$ 上的一维的向量空间, 并且如下定义 $\mathbb{C}$ 与 G 中的元素的一个乘法:

$$\lambda g = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{C}, g \in G).$$

在这种情况下, $\mathbb{C}$ 变成了一个平凡的 $\mathbb{C}G$-模.

(1) 假设 $\iota\chi \neq 0$. 那么 1_G 是 χ^2 的一个成分, 因此 $\mathbb{C}G$-模 $V \otimes V$ 有一个平凡的 $\mathbb{C}G$-子模. 由命题 8.8 我们知道存在从 $V \otimes V$ 到这个平凡的 $\mathbb{C}G$-子模上的一个非零的 $\mathbb{C}G$-同态, 因此存在从 $V \otimes V$ 到平凡的 $\mathbb{C}G$-模 $\mathbb{C}$ 上的一个非零的 $\mathbb{C}G$-同态 ϑ.

现在如下定义 β:

$$\beta(u, v) = (u \otimes v)\vartheta \quad (u, v \in V).$$

因此 β 是 V 上的一个非零的双线性型, 并且对于所有的 $u, v \in V, g \in G$ 来说有:

$$\begin{aligned}\beta(ug, vg) &= (ug \otimes vg)\vartheta = ((u \otimes v)g)\vartheta \\ &= ((u \otimes v)\vartheta)g = (u \otimes v)\vartheta = \beta(u, v).\end{aligned}$$

因此 β 是 G-不变的.

反过来, 假设存在 V 上的非零的 G-不变双线性型 β. 令 $v_1, ..., v_n$ 是 V 的一组基, 所以 $v_i \otimes v_j (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ 构成 $V \otimes V$ 的一组基. 如下定义 $\vartheta : V \otimes V \to \mathbb{C}$:

$$(v_i \otimes v_j)\vartheta = \beta(v_i, v_j) \quad (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n),$$

并且线性地扩充到整个 $V \otimes V$ 上去. 对于所有的 $g \in G$, 有

$$\begin{aligned}((v_i \otimes v_j)g)\vartheta &= (v_i g \otimes v_j g)\vartheta = \beta(v_i g, v_j g) \\ &= \beta(v_i, v_j) = (v_i \otimes v_j)\vartheta,\end{aligned}$$

因此 ϑ 是从 $V \otimes V$ 到平凡 $\mathbb{C}G$-模 $\mathbb{C}$ 上的一个非零的 $\mathbb{C}G$-同态. 因此, 由命题 10.1 我们知道 $V \otimes V$ 有一个平凡的 $\mathbb{C}G$-子模. 因此我们知道 χ^2 的成分中含有平凡特征标 1_G, 因此 $\iota\chi \neq 0$.

(2) 假设 $\iota\chi = 1$. 那么 1_G 是 χ_S 的一个成分, 其中 χ_S 是 $\mathbb{C}G$-模 $V \otimes V$ 的对称部分 $S(V \otimes V)$ 的特征标. 像在 (1) 中一样, 由命题 8.8 我们知道存在一个从 $S(V \otimes V)$ 到平凡 $\mathbb{C}G$-模 $\mathbb{C}$ 上的一个非零的 $\mathbb{C}G$-同态. 如下定义:

$$\beta(u, v) = (u \otimes v + v \otimes u)\vartheta \quad (u, v \in V).$$

那么 β 是 V 上的一个非零的 G-不变对称的双线性型.

反过来, 假设存在 V 上的一个非零的 G-不变对称的双线性型 β. 令 $v_1, ..., v_n$ 是 V 的一组基, 如下定义 $\vartheta : S(V \otimes V) \to \mathbb{C}$

$$(v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i)\vartheta = \beta(v_i, v_j) \quad (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n),$$

并且线性地扩充到整个 $S(V \otimes V)$ 上去. 因为 β 是对称的, 所以 ϑ 是从 $S(V \otimes V)$ 到平凡 $\mathbb{C}G$-模 $\mathbb{C}$ 上的一个非零的 $\mathbb{C}G$-同态. 因此 χ_S 的成分中含有平凡特征标 1_G, 故 $\iota\chi = 1$.

(3) 它的证明与 (2) 是很类似的, 所以省略. 证毕.

现在我们可将群 G 的实表示与它的对合元联系起来, 其中对合元是指阶数为 2 的元素.

23.17　推论 (Frobenius-Schur 对合元计数原理)

对于 G 的每个不可约的特征标 χ 来说, 有

$$\iota\chi = \begin{cases} 0, & \chi \text{ 不是实的;} \\ 1, & \chi \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上可以实现;} \\ -1, & \chi \text{ 是实的但是 } \chi \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上不可以实现.} \end{cases}$$

更近一步地, 对于所有的 $x \in G$, 有

$$\sum_{\chi} (\iota\chi)\chi(x) = |\{y \in G : y^2 = x\}|,$$

其中和是在 G 的所有的不可约的特征标 χ 上进行的. 特别地,

$$\sum_{\chi} (\iota\chi)\chi(1) = 1 + t,$$

其中 t 是 G 中对合元的数量.

证明　在定义指标函数的时候我们已经说明 $\iota\chi \neq 0$ 当且仅当 χ 是实的. 并且定理 23.11 和 23.16(2) 表明了 χ 在 $\mathbb{R}$ 上可以实现当且仅当 $\iota\chi = 1$. 这个证明了 $\iota\chi$ 的定义就如这个推论中说的一样.

$\sum_{\chi}(\iota\chi)\chi(x)$ 的表达式已经在定理 23.14 中得到. 现在令 $x=1$, 得到 $\sum_{\chi}(\iota\chi)\chi(1)$ 等于满足 $y^2=1$ 的 G 中的元素 y 的数量. 这些元素正好是 G 中的对合元再加上单位元, 所以它们的数量是 $t+1$. 证毕.

我们通过一些例子来说明推论 23.17 的应用.

23.18 例子

(1) 令 χ 是一个线性特征标. 如果 χ 是实的, 则 $\iota\chi=1$; 如果 χ 不是实的, 则 $\iota\chi=0$.

对于一个交换群来说, Frobenius-Schur 对合元计数原理表明了实的不可约 (线性) 特征标的数量和实的共轭类的数量是相等的, 因为在这种情况下有 g 和 g^{-1} 共轭当且仅当 $g^2=1$. 定理 23.1 的这种特殊的情况可以不难直接证明 (见习题 23.2).

(2) 我们知道 $D_8=\langle a,b:a^4=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$ 的所有不可约的特征标在 $\mathbb{R}$ 上可以实现 (见例子 23.3(1), 并且注意到所有的四个线性特征标是实的). 因此对于 D_8 的所有不可约特征标 χ 来说, 有 $\iota\chi=1$, 并且有

$$\sum_{\chi}(\iota\chi)\chi(1)=1+1+1+1+2=6.$$

由 Frobenius-Schur 对合元计数原理预测的 D_8 的五个对合元是 a^2, b, ab, a^2b 和 a^3b.

(3) 在群 $Q_8=\langle a,b:a^4=1,a^2=b^2,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$中有且仅有一个对合元, 即 a^2. 现在对于四个线性特征标来说都有 $\iota\chi=1$, 并且由 Frobenius-Schur 对合元计数原理我们知道

$$\sum_{\chi}(\iota\chi)\chi(1)=2.$$

因此, 如果 ψ 是次数为 2 的不可约的特征标, 那么 $\iota\psi=-1$. 特别地, ψ 在 $\mathbb{R}$ 上不可以实现.

(4) 对称群 S_4 有 10 个平方是 1 的元素, 即单位元、六个与 (12) 共轭的元素还有三个与 (12)(34) 共轭的元素. 因为 S_4 的不可约的特征标的次数为 1,1,2,3,3 加起来是 10 (见 18.1 部分), 我们看到 S_4 的所有的特征标都可以在 $\mathbb{R}$ 上实现.

Brauer-Fowler 定理

我们现在应用推论 23.17 来给出 Brauer 和 Fowler 的一个有名的定理的证明.

23.19 Brauer-Fowler 定理

令 n 是一个正整数. 那么存在有限多个不同构的有限单群使得这些单群均包含一个对合元素, 而且其关于这个对合元素的中心化子恰好有 n 个元素.

尽管这个定理的证明相当的基础, 但是这个结果在有限群理论中有重要的历史意义. 它使得 Brauer 提出了确定规划, 即对于每个有限群 C 来说, 确定所有的单群 G 使得 G 包含一个对合元 u 满足 $C_G(u) \cong C$. 这个规划是在现代尝试着对有限单群分类的开始, 并且有限单群的分类在 20 世纪 80 年代早期终于完成了. 对于这一方面更多的知识, 可以看在参考文献中列出的由 D. Gorenstein[3] 写的书.

在这章后面的习题 10 中要读者来证明在 $C \cong C_2$ 情况下的 Brauer 规划. 这个对读者来说不会有什么太大的困难. 在第 30 章的定理 30.8 中你会发现一个更复杂的情况, 即 $C \cong D_8$ 的情况.

在证明定理 23.19 的证明之前我们需要证明两个预备的引理.

23.20 引理

如果 $a_1, ..., a_n$ 是实数, 那么 $\sum a_i^2 \geqslant (\sum a_i)^2/n$.

证明 由柯西施瓦茨不等式 $\| v \| \cdot \| w \| \geqslant |v \cdot w|$ 很容易地得到结论, 只需要令 $v = (a_1, ..., a_n), w = (1, ..., 1)$ 即可. 证毕.

23.21 引理

令 G 是一个阶为偶数 m 的群, 令 t 是 G 中对合元的数量 (所以由第 1 章的习题 8 有 $t > 0$). 记 $a = (m-1)/t$. 那么 G 包含一个非单位元 x 使得 $|G : C_G(x)| \leqslant a^2$.

证明 由推论 23.17 有

$$t \leqslant \sum_{\chi} \chi(1),$$

其中和是在 G 的所有的非平凡不可约的特征标上进行的. 记 G 的所有的不可约的特征标的数量为 k, 应用引理 23.20 和定理 11.12 有

$$t^2 \leqslant (\sum_{\chi} \chi(1))^2 \leqslant (k-1) \sum (\chi(1))^2 = (k-1)(m-1).$$

因此 $m-1 \leqslant (k-1)(m-1)^2/t^2 = (k-1)a^2$. 现在 $k-1$ 是 G 的非单位共轭类的数量. 如果 G 的每个非单位共轭类的大小都大于 a^2, 那么 $(k-1)a^2 > |G| - 1 = m-1$, 这是一个矛盾. 因此至少存在一个非单位的共轭类大小至多是 a^2. 那么 $|G : C_G(x)| \leqslant a^2$. 证毕.

定理 23.19 的证明: 假设 G 是单群, 并且包含一个对合元 u 使得 $|C_G(u)| = n$. 令 $|G| = m$, 令 t 是 G 中对合元的数量. 由命题 12.6 我们知道共轭类 u^G 中的每个元素都是一个对合元, 因此有

$$t \geqslant |u^G| = |G : C_G(u)| = m/n.$$

因此 $(m-1)/t \leqslant n$, 所以由引理 23.21 我们知道存在一个非单位元 $x \in G$ 使得 $|G : C_G(x)| < n^2$.

令 $H = C_G(x)$. 如果 $H = G$ 那么 $x \in Z(G)$, 其中 $Z(G)$ 是 G 的中心, 也是 G 的一个正规子群. 因为 G 是单群, 所以 $G = Z(G)$, 所以 G 是交换群, 因此 $G \cong C_2$.

现在假设 $H \neq G$. 记 $r = |G : H|$, 所以 $r < n^2$. 由本章后面的习题 9 我们知道存在一个从 G 到对称群 S_r 的非平凡同态 θ. 因为 G 是单群, 所以正规子群 $\mathrm{Ker}\theta = \{1\}$. 因此 G 同构于 S_r 的一个子群, 因此 G 同构于 S_{n^2} 的一个子群. 特别地, 给定一个 n, 仅仅存在有限多种 G 的情况. 证毕.

第 23 章总结

1. G 的不可约的实特征标的数量等于 G 的实共轭类的数量.

令 ι 是指标函数, 令 χ 是 G 的一个不可约的特征标.

2. $\iota\chi = \begin{cases} 0, & \chi \text{ 不是实的;} \\ 1, & \text{存在一个特征标为 } \chi \text{ 的 } \mathbb{R}G\text{-模 } U; \\ -1, & \chi \text{ 是实的但是不存在一个 } \mathbb{R}G\text{-模.} \end{cases}$

3. $\iota\chi = \begin{cases} 0, & 1_G \text{ 不是 } \chi_S \text{ 或 } \chi_A \text{ 的成分;} \\ 1, & 1_G \text{ 是 } \chi_S \text{ 的一个成分;} \\ -1, & 1_G \text{ 是 } \chi_A \text{ 的一个成分.} \end{cases}$

4. $\sum\limits_{\chi}(\iota\chi)\chi(1) = |\{g \in G : g^2 = 1\}|$.

第 23 章习题

1. 证明如果 G 是一个奇数阶的群, 那么不存在 G 的非单位元是实的.

2. 令 G 是一个有限交换群. 用在定理 9.8 中给出的 G 的不可约的特征标的描述, 直接证明 G 的不可约实特征标的数量等于使得 $g^2 = 1$ 成立的元素 g 的数量.

3. 令 $G = D_{2n}$, 参考 18.3 中的 G 的特征标表. 请问使得 $g^2 = 1$ 成立的元素 g 的数量? 证明对于 G 的所有不可约的特征标 χ 来说有 $\iota\chi = 1$.

4. 令 ρ 是群 G 的次数为 2 的一个不可约的表示, 令 χ 是 ρ 的特征标. 证明对于所有的 $g \in G$ 来说有 $\chi_A(g) = \det(g\rho)$. 证明 $\iota\chi = -1$ 当且仅当对于所有的 $g \in G$ 来说有 $\det(g\rho) = 1$.

5. 令 $G = T_{4n} = \langle a, b : a^{2n} = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, 就像习题 17.6 中定义的一样. 令 V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个二维的向量空间, 基为 v_1, v_2. 令 ε 是一个 $2n$ 次单位根并且 $\varepsilon \neq \pm 1$. 习题 17.6 证明了如果如下定义, 那么 V 是一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模:

$$v_1a = \varepsilon v_1,\ v_1b = v_2,$$
$$v_2a = \varepsilon^{-1}v_2,\ v_2b = \varepsilon^n v_1.$$

令 χ 是这个 $\mathbb{C}G$-模 V 的特征标.

(a) 注意到 $\varepsilon^n = \pm 1$. 运用习题 4 证明如果 $\varepsilon^n = 1$ 那么 $\iota\chi = 1$; 如果 $\varepsilon^n = -1$ 那么 $\iota\chi = -1$.

(b) 令 β 是 V 上的一个双线性型, 并且有

$$\beta(v_1, v_1) = \beta(v_2, v_2) = 0,$$

$$\beta(v_1, v_2) = 1, \beta(v_2, v_1) = \varepsilon^n.$$

证明双线性型 β 是 G-不变的, 并且运用定理 23.16 给出 (a) 结论的第二种证法.

(c) 证明 a^n 是 T_{4n} 中唯一的二阶元.

(d) 设 χ 是 G 的任意一个不可约的特征标, 应用在习题 18.3 的解答中出现的 G 的特征标表求出 $\iota\chi$. 并验证

$$\sum_{\chi} (\iota\chi)\chi(1) = 2,$$

这说明与 Frobenius-Schur 对合元计数原理是一致的.

6. 证明如果 χ 是群 G 的一个不可约的特征标, 并且有 $\iota\chi = -1$, 那么 $\chi(1)$ 是偶数 (提示: 应用斜对称的双线性型的一个有名的结论).

7. 令 V 是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间, β_1 和 β 是 V 上的对称的双线性型. 假设对于所有的 V 中的非零元 w 来说有 $\beta_1(w, w) > 0$. 证明存在 V 的一组基 $e_1, ..., e_n$ 使得

$$\beta_1(e_i, e_i) = 1, \quad \forall i,$$

$$\beta_1(e_i, e_j) = \beta(e_i, e_j) = 0, \quad \forall i \neq j.$$

8. Schur 引理对于 $\mathbb{C}G$-模理论的研究具有重要的意义. 本题说明了 Schur 引理的结论的延伸对于 $\mathbb{R}G$-模是仍然成立的.
令 V 和 W 是不可约的 $\mathbb{R}G$-模.

(a) 证明如果 $\vartheta : V \to W$ 是一个 $\mathbb{R}G$-同态, 那么或者 ϑ 是一个 $\mathbb{R}G$-同构, 或者对于所有的 $v \in V$ 来说有 $v\vartheta = 0$.

(b) 证明如果 $\vartheta : V \to V$ 是一个 $\mathbb{R}G$-同构并且 V 是一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模, 那么存在某个实数 λ 使得 $\vartheta = \lambda 1_V$.

(c) 举这样的一个群 G 的例子, 使得 V 是一个不可约的 $\mathbb{R}G$-模, $\mathbb{R}G$-同态 $\vartheta : V \to V$ 不是 1_V 的数乘.

9. 令 G 是有个指数为 n 的子群 H 的群. 令 Ω 是 H 在 G 中的 n 个右陪集 Hx 组成的集合. 对于 $g \in G$ 来说, 如下定义一个函数 $\rho_g : \Omega \to \Omega$

$$(Hx)\rho_g = Hxg \quad (x \in G).$$

证明 ρ_g 是 Ω 的一个置换, 并且有函数 $\rho : g \mapsto \rho_g$ 是从 G 到 Ω 上的对称群的一个同态.

证明 ρ 的核是 $\bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$.

证明如果群 G 有个指数为 n 的子群 H, 那么存在一个同态 $G \to S_n$ 使得同态的核包含在 H 中.

10. 假设 G 是一个包含一个对合元 t 的有限群, 并且这个对合元满足 $C_G(t) \cong C_2$. 证明 $|G : G'| = 2$. 证明如果 G 是单群, 那么 $G \cong C_2$.

第24章　特征标表性质总结

在本章中我们并不陈述新的结论，只是将前面各个章节中出现的有关特征标表的重要性质作一下梳理与总结. 在接下来的四章中我们将详细地计算一些群的特征标表.

在构造一个群 G 的特征标表时，通常先求出 G 的共轭类及其中心化子的阶数. 因为当群 G 的共轭类的个数为 k 时，G 的特征标表是一个 $k \times k$ 阶矩阵，并且矩阵的列由 G 的共轭类所标示 (其中第一行对应着共轭类 $\{1\}$)，矩阵的行由 G 的不可约特征标所标志.

为了确定所得的特征标 χ 是否可约，我们可以求特征标的内积 $\langle \chi, \chi \rangle$，其中

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)}.$$

根据定理 14.20 可知，特征标 χ 不可约当且仅当 $\langle \chi, \chi \rangle = 1$. 若 χ 是可约的，则我们求它与每个已知的不可约特征标 χ_i 的内积 $\langle \chi, \chi_i \rangle$，从而

$$\chi - \sum_i \langle \chi, \chi_i \rangle \chi_i$$

也是一个特征标，并且可以通过该特征标来判断 χ 是否为已知的不可约特征标的线性组合. 如果 χ 不是已知的不可约特征标的线性组合，则可以通过 χ 得到了一个新的特征标，使得它是一些新的不可约特征标的线性组合.

在前面的章节中我们得到了许多求解特征标的方法. 例如，S_n 的每一个子群都有一个置换特征标 (见 (13.22))；两个特征标的乘积仍然是一个特征标 (见命题 (19.6))；给定一个特征标 χ，可以构造 χ^2 的对称部分 χ_S 与反对称部分 χ_A(见命题 19.14)；并且假设 H 是 G 的一个子群，可以将 G 的特征标限制到 H 上，同时也可以对 H 的特征标进行诱导得到 G 的特征标. 现在将这些性质以及其他关于特征标的性质总结如下.

特征标的性质

在本节中假设 $\chi_1, \cdots, \chi_k$ 为群 G 的不可约特征标.

(1) (例 13.8(3)) 每一个群 G 均有一个平凡特征标 χ，其中

$$\chi(g) = 1 \quad 对于所有的 g \in G.$$

(2) (定理 17.11) 群 G 共有 $|G/G'|$ 个线性特征标. 并且这些特征标 χ 为 $\chi(g) = \psi(gG')$ $(g \in G)$, 其中 ψ 取遍 G/G' 的所有不可约 (线性) 特征标.

(3) (定理 17.3) 作为 (2) 的一个延伸, 若 $N \lhd G$ 且 ψ 为 G/N 的一个不可约特征标, 则可以通过 $\chi(g) = \psi\ (gN)(g \in G)$ 来构造群 G 的不可约特征标 χ, 并称 χ 为 ψ 的提升. 该方法给出了群 G 所有的核包含 N 的不可约特征标.

(4) (定理 19.18) 假设 $G = G_1 \times G_2$, 则群 G 的所有不可约特征标 χ 由

$$\chi(g_1, g_2) = \phi_1(g_1)\phi_2(g_2) \quad (g_1 \in G_1, g_2 \in G_2)$$

给出, 其中 ϕ_i 取遍群 $G_i\ (i = 1, 2)$ 的所有不可约特征标.

(5) (命题 13.24) 若 G 是 S_n 的一个子群, 则定义为

$$v(g) = |\mathrm{fix}(g)| - 1 \quad (g \in G)$$

的函数 $v : G \to \mathbb{C}$ 是群 G 的一个特征标.

(6) (定理 11.12, 22.11) 在群 G 的特征标表中, 第一列的元素 $\chi_i(1)$ 均为正整数, 且满足

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(1)^2 = |G|.$$

且每一个 $\chi_i(1)$ 均整除 $|G|$.

(7) (行正交关系, 定理 16.4(1)) 对于所有的 i, j, 有 $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$.

(8) (列正交关系, 定理 16.4(2)) 对于所有的 $g, h \in G$ 有

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} |C_G(g)|, & \text{若 } g, h \text{ 共轭} \\ 0, & \text{若} g, h \text{ 不共轭.} \end{cases}$$

(9) (练习 13.5) 若 χ 是群 G 的一个不可约特征标, 且 $z \in Z(G)$, 则存在一个单位根 ε 使得对于所有的 $g \in G$, 有 $\chi(zg) = \varepsilon\chi(g)$.

(10) (命题 13.9(2)) 假设 g 是群 G 的一个阶数为 n 的元素, χ 是群 G 的一个特征标, 则 $\chi(g)$ 是 n 次单位根的和, 并且满足 $|\chi(g)| \leqslant \chi(1)$.

(11) (命题 13.9(3, 4)) 设 $g \in G$, χ 为 G 的一个特征标, 则 $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. 特别地, 若 g 与 g^{-1} 共轭, 则对于群 G 的所有特征标 χ 有 $\chi(g)$ 为实数.

(12) (推论 15.6) 假设 $g \in G$, 且 g 与 g^{-1} 不共轭, 则存在群 G 的一些特征标 χ, 使得 $\chi(g)$ 不是实数.

(13) (定理 22.16) 假设 $g \in G$, 且 g 与所有的 g^i 共轭 (其中 i 为所有与 g 的阶数互素的正整数), 则对于群 G 的所有特征标 χ 有 $\chi(g)$ 为整数.

(14) (推论 22.26) 假设 p 是一个素数, 且 y 为 G 中的元素 g 的 p'- 部分. 若 χ 是 G 的一个特征标, 满足 $\chi(g), \chi(y)$ 均为整数, 则

$$\chi(g) \equiv \chi(y) \bmod p.$$

特别地, 若 g 的阶数为 p 的幂次, 则

$$\chi(g) \equiv \chi(1) \bmod p.$$

(15) (命题 13.15) 假设 χ 是群 G 的一个不可约特征标, 则 $\bar{\chi}$ 也是群 G 的一个不可约特征标, 其中

$$\bar{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}, \quad g \in G.$$

(16) (定理 23.1) 群 G 的实不可约特征标的个数等于群 G 的实共轭类的个数.

(17) (命题 17.14) 假设 χ 是群 G 的一个不可约特征标, λ 是群 G 的一个线性特征标, 则 $\chi\lambda$ 是群 G 的一个不可约特征标, 其中 $\chi\lambda(g) = \chi(g)\lambda(g)$ $(g \in G)$.

(18) (命题 19.6) 假设 χ, ψ 是群 G 特征标, 则 $\chi\psi$ 也是群 G 的特征标, 其中 $\chi\psi(g) = \chi(g)\psi(g)$ $(g \in G)$.

(19) (命题 19.14) 假设 χ 是群 G 的一个特征标, 则 χ_S, χ_A 也是群 G 的特征标, 其中对于所有的 $g \in G$ 有

$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2)),$$

$$\chi_A(g) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2)).$$

(20) (定义 21.13, 命题 21.23) 假设 H 是群 G 的一个子群, 且 ψ 是 H 的一个特征标, 则 $\psi \uparrow G$ 是 G 的一个特征标, 它的值在命题 21.23 中给出.

(21) (第 20 章) 假设 H 是群 G 的一个子群, 且 ψ 是 G 的一个特征标, 则 $\psi \downarrow H$ 是 H 的一个特征标, 其中 $(\psi \downarrow H)(h) = \psi(h)$ $(h \in H)$.

通过前面的学习我们知道群 G 的特征标表包含了群 G 的许多群论信息. 例如, 特征标表的第一列决定了 G 的阶数 $|G|$ 以及 G/G' 的阶数 $|G/G'|$(由 (6) 和 (2)). 根据命题 17.6 我们可以通过特征标表来确定一个群是否为单群; 事实上, 可以通过特征标表来确定群 G 的所有正规子群 (见命题 17.5). 群 G 的两个重要的正规子群 $G', Z(G)$ 可以通过下面的方法得到: 群 G 的导群 G' 是由群 G 中对于所有的线性特征标 χ, 都有 $\chi(g) = 1$ 的元素 g 组成; 若群 G 中的元素 g 满足 $\sum \chi(g)\overline{\chi(g)} = |G|$, 其中 χ 取遍 G 的所有不可约特征标, 则 $g \in Z(G)$, 并且 $Z(G)$ 中的元素均满足该性质. 在本书的第 30 章将看到通过群 G 的特征标表, 我们可以得到更多群 G 的子群的更深刻结果.

最后需要指出的是, 虽然同构的群的特征标表必然相同, 但是两个群的特征标表相同并不能推出这两个群同构, 如 D_8 与 Q_8 便是一个典型的例子 (参见习题 17.1).

第 25 章　pq 阶群的特征标

在下一章的最后, 我们将决定所有阶小于 32 的群的特征标表. 这些群中很多就是所谓的 Frobenius 群, 这一章将给出了一类 Frobenius 群, 并找到这些群的特征标表. 特别地, 我们给出了所有阶数为两个素数的乘积的群的特征标表.

这一章中, p 为素数.

模 p 本原根

集合

$$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\},$$

在模 p 下的加法和乘法下, 作成一个域; 也就是, $\mathbb{Z}_p$ 在加法下是一个交换群, 且 $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{0\}$ 在乘法下是一个交换群. 显然 $\mathbb{Z}_p$ 在加法下是由 1 生成的循环群.$\mathbb{Z}_p^*$ 也是循环群, 但不那么显然.

25.1　定理

乘法群 $\mathbb{Z}_p^*$ 是循环群; 也就是, 存在一个整数 n 使得

$$n^{p-1} \equiv 1 \bmod p, \quad \text{且}$$
$$n^r \not\equiv 1 \bmod p, \quad 0 < r < p-1.$$

一个阶为 $p-1$ 的整数 n, 称为一个模 p 本原根. 我们将不给出定理 25.1 的证明, 但是我们建议读者参考书目中列出的由 J. B. Fraleigh[2] 写的书中定理 45.3.

25.2　例子

数字 2 是一个模 3, 5, 11 或 13 的本原根, 但不是一个模 7 本原根; 数字 3 是一个模 7 本原根.

作为定理 25.1 可以直接推出的结果, 有

25.3　命题

若 $q \mid p-1$ 那么存在一个整数 u 使得 u 在模 p 意义下阶为 q, 也就是, 使得

$$u^q \equiv 1 \bmod p, \quad \text{且}$$
$$u^r \not\equiv 1 \bmod p, \quad 0 < r < q.$$

pq 阶 Frobenius 群 $(q \mid p-1)$

25.4 例子

定义

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_p^*, y \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

在矩阵乘法下, G 是一个 $p(p-1)$ 阶群 (参见习题 25.1).

现在令 $q \mid p-1$, u 是乘法群 $\mathbb{Z}_p^*$ 的一个 q 阶元. 定义

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix},$$

且令 $F = \langle A, B \rangle$, G 中由 A, B 生成的子群. 那么

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^u,$$

所以有关系

(25.5) $$A^p = B^q = I, \quad B^{-1}AB = A^u.$$

利用这些关系, 我们知道 F 中的每个元素都有 A^iB^j 这种形式, 其中 $0 \leqslant i \leqslant p-1, 0 \leqslant j \leqslant q-1$. 这 pq 个元素是互不相同的, 所以 $|F| = pq$. 此外, 关系 (25.5) 决定了 F 中所有的乘积, 所以有

$$F = \langle A, B : A^p = B^q = I, B^{-1}AB = A^u \rangle.$$

25.6 定义

若 p 是一个素数, 且 $q \mid p-1$, 那么记 $F_{p,q}$为能表示为

$$F_{p,q} = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle$$

这种形式的 pq 阶群, 其中 u 是 $\mathbb{Z}_p^*$ 的一个 q 阶元.

在同构意义上, 并不难说明 $F_{p,q}$ 并不依赖于 q 阶元 u 的选取 (参见习题 25.3).

群 $F_{p,q}$ 属于更大的一类群 ——Frobenius 群. 因为我们仅对 $F_{p,q}$ 进行处理, 这里将不会给出它们的一般定义; 有兴趣的读者可在参考文献中 D. S. Passman[5] 的书中找到更多的信息.

接下来的结果对所有阶为两个不同素数乘积的群进行了分类.

25.7　命题

设 G 是一个 pq 阶群, 其中 p, q 为素数, 且 $p > q$. 那么或者 G 为交换群, 或者 q 整除 $p-1$, 且 $G \cong F_{p,q}$.

证明　假设 G 非交换. 通过习题 22.3 知道 q 整除 $p-1$, 且 G 有一个 p 阶的正规子群 H(又或者, 也可以根据 Sylow 定理得出 (参见参考文献中 J.B.Fralergh[2] 的书的 18 章)).

H 和 G/H 都是循环群, 因为它们都是素数阶. 假设 $H = \langle a \rangle$ 且 $G/H = \langle Hb \rangle$; 那么 G 是由 a, b 生成的. 因为 $b^q \in H$ 但 b 的阶不是 pq(因为 G 是非交换的), 所以 b 为 q 阶.

现在 $H \lhd G$, 所以存在整数 u 有 $b^{-1}ab = a^u$. 另外,

$$a = b^{-q}ab^q = a^{u^q},$$

且 $u^q \equiv 1 \bmod p$. 这样在 $\mathbb{Z}_p^*$ 中 u 的阶整除 q. 如果 u 的阶为 1, 那么有 $b^{-1}ab = a$, 且 G 为交换群. 所以 u 的阶为 q. 现在有

$$a^p = b^q = 1, \quad b^{-1}ab = a^u,$$

u 在 $\mathbb{Z}_p^*$ 中的阶为 q. 因此 $G \cong F_{p,q}$. 证毕.

25.8　例子

根据命题 25.7, 任意的 15 阶群都是交换群 (事实上, 它们同构于 $C_3 \times C_5$); 且 21 阶群为 $C_3 \times C_7$ 和 $F_{7,3}$.

$F_{p,q}$ 的特征标表

实际上我们已经找到了一些群 $F_{p,q}$ 的特征标表：$2p$ 阶的二面体群, 这就是 $q = 2$ 的情况, 在例 21.25 中我们处理过 $F_{7,3}$. 现在构造一般情况下的 $F_{p,q}$ 的特征标表. 令

$$G = F_{p,q} = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle,$$

其中 p 是一个素数, $q \mid p-1$(q 不一定为素数), u 的阶在模 p 意义下为 q.

令 S 是 $\mathbb{Z}_p^*$ 的包含 u 的幂次的子群. 这样 $|S| = q$. 记 $r = (p-1)/q$, 且取 $\mathbb{Z}_p^*$ 对 S 的陪集代表元为 $v_1, \ldots, v_r$.

25.9　命题

$G=F_{p,q}$ 的共轭类是

$$\begin{aligned}&\{1\},\\&(a^{v_i})^G=\{a^{v_is}:s\in S\}\quad(1\leqslant i\leqslant r),\\&(b^n)^G=\{a^mb^n:0\leqslant m\leqslant p-1\}\quad(1\leqslant n\leqslant q-1).\end{aligned}$$

证明　方程

$$b^{-j}a^vb^j=a^{vu^j}$$

说明了对任意的 $s\in S$, 有 a^v 与 a^{vs} 共轭. 所以 a^{v_i} 的共轭类的大小至少为 q; 这个共轭类的大小等于 $|G:C_G(a^{v_i})|$, 因为 $\langle a\rangle\leqslant C_G(a^{v_i})$, 所以 a^{v_i} 的共轭类的大小至多为 q. 因此 $(a^{v_i})^G$ 大小为 q, 有命题中的形式.

因为 $C_G(b^n)$ 包含 $\langle b\rangle$, 而 $\langle b\rangle$ 在 G 中的指数为 p, 且 $n\not\equiv 0 \bmod q$, 有 $|C_G(b^n)|=q$, 所以 b^n 共轭类的大小为 p. 另一方面, 因为 $G/\langle a\rangle$ 为交换群, b^n 的每个共轭元对某个 m 有形式 a^mb^n. 因此

$$(b^n)^G=\{a^mb^n:0\leqslant m\leqslant p-1\}.$$

证毕.

根据命题 25.9, G 有 $q+r$ 个共轭类, 所以需要找 $q+r$ 个不可约特征标.

首先, 导群 $G'=\langle a\rangle$, 所以 G/G' 阶为 q, 根据定理 17.11, G 恰有 q 个线性特征标. 已经给定 $\chi_n(0\leqslant n\leqslant q-1)$, 其中

$$\chi_n(a^xb^y)=e^{2\pi iny/q}\quad(0\leqslant x\leqslant p-1,0\leqslant y\leqslant q-1).$$

我们将要说明 G 有 r 个次数为 q 的特征标.

令 $\varepsilon=e^{2\pi i/p}$. 对 $v\in\mathbb{Z}_p^*$, 记 ψ_v 为 $\langle a\rangle$ 的特征标, 其中

$$\psi_v(a^x)=\varepsilon^{vx}\quad(0\leqslant x\leqslant p-1).$$

利用命题 21.23 计算诱导特征标 $\psi_v\uparrow G$ 的值. 有

$$\begin{aligned}&(\psi_v\uparrow G)(a^xb^y)=0,\quad 若 1\leqslant y\leqslant q-1,\quad 且\\&(\psi_v\uparrow G)(a^x)=\sum_{s\in S}\varepsilon^{vsx}\quad(0\leqslant x\leqslant p-1).\end{aligned}$$

$\psi_v\uparrow G$ 次数为 q, 且若 $s\in S$,

$$\psi_v\uparrow G=\psi_{vs}\uparrow G$$

对 S 在 $\mathbb{Z}_p^*$ 中的任一陪集代表元 $v_j(1 \leqslant j \leqslant r)$, 令

$$\phi_j = \psi_{vj} \uparrow G.$$

现在证明每一个 ϕ_j 为不可约的. 根据 Frobenius 互反定律 21.16, 对任意的 $s \in S$,

$$\langle \phi_j \downarrow \langle a \rangle, \psi_{v_j s} \rangle_{\langle a \rangle} = \langle \phi_j, \psi_{v_j s} \uparrow G \rangle_G = \langle \phi_j, \phi_j \rangle_G.$$

因此

$$\phi_j \downarrow \langle a \rangle = \langle \phi_j, \phi_j \rangle_G \sum_{s \in S} \psi_{v_j s} + \chi,$$

其中 χ 为 0 或 $\langle a \rangle$ 的一个特征标. 取其次数, 有 $\phi_j(1) \geqslant |S| \langle \phi_j, \phi_j \rangle_G$. 因为 $\phi_j(1) = q = |S|$, 我们推出 $\langle \phi_j, \phi_j \rangle_G = 1$. 这就证明了 ϕ_j 是不可约的, 并且有 $\phi_j \downarrow \langle a \rangle = \langle \phi_j, \phi_j \rangle_G \sum\limits_{s \in S} \psi_{v_j s}$.

根据定理 14.23, 特征标 $\psi_v (v \in \mathbb{Z}_p^*)$ 是线性无关的, 因此 $\phi_1 \downarrow \langle a \rangle, \ldots, \phi_r \downarrow \langle a \rangle$ 是互不相同的. 所以不可约特征标 $\phi_1, \ldots, \phi_r$ 是互不相同的.

现在找到了 G 的 $q+r$ 个互不相同的不可约特征标 $\chi_n, \phi_j (0 \leqslant n \leqslant q-1, 1 \leqslant j \leqslant r)$, 所以我们找到了 G 的完整的特征标表. 我们总结了如下定理.

25.10 定理

令 p 为一个素数, $q \mid p-1$ 且 $r = (p-1)/q$. 那么群

$$\begin{aligned} F_{p,q} &= \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle \\ &= \{a^x b^y : 0 \leqslant x \leqslant p-1, 0 \leqslant y \leqslant q-1\} \end{aligned}$$

有 $q+r$ 个不可约特征标. 其中 q 个次数为 1, 分别为

$$\chi_n(a^x b^y) = e^{2\pi i n y/q} \quad (0 \leqslant n \leqslant q-1).$$

且 r 个次数为 q 分别为

$$\begin{aligned} &\phi_j(a^x b^y) = 0, \quad 若 1 \leqslant y \leqslant q-1, \\ &\phi_j(a^x) = \sum_{s \in S} e^{2\pi i v_j s x/p}, \end{aligned}$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant r$, $v_1 S, \ldots, v_r S$ 为由 u 生成的子群 S 在 $\mathbb{Z}_p^*$ 中的陪集.

下面用一些例子来说明定理 25.10.

25.11 例子

令

$$G = F_{p,p-1} = \langle a, b : a^p = b^{p-1} = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle,$$

其中 u 是一个模 p 本原根. 那么 G 有 $p-1$ 个线性特征标, 和一个次数为 $p-1$ 的不可约特征标 ϕ, 其值由下式给出

$$\phi(a^x b^y) = 0, \quad \text{若} 1 \leqslant y \leqslant p-2,$$
$$\phi(a^x) = -1, \quad \text{若} 1 \leqslant x \leqslant p-1.$$

25.12 例子

令 $a, b \in S_5$ 为置换 $a = (12345), b = (2354)$. 验证有 $a^5 = b^4 = 1, b^{-1}ab = a^2$. 因此, 若 $G = \langle a, b \rangle$, 那么 $G \cong F_{5,4}$ 所以根据上一个例子, G 的特征表是:

$F_{5,4}$ 的特征标表

g_i	1	a	b	b^2	b^3
$\|C_G(g_i)\|$	20	5	4	4	4
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	i	-1	$-i$
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	$-i$	-1	i
ϕ	4	-1	0	0	0

25.13 例子

考虑 $p = 13, q = 4$ 的情况. 这里

$$F_{13,4} = \langle a, b : a^{13} = b^4 = 1, b^{-1}ab = a^5 \rangle.$$

记 $\varepsilon = e^{2\pi i/13}$, 且令

$$\alpha = \varepsilon + \varepsilon^5 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{12},$$
$$\beta = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11},$$
$$\gamma = \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^9,$$

根据定理 25.10, $F_{13,4}$ 的特征标表在下面给出.

在例 21.25 中我们找到了 $F_{7,3}$ 的特征标表. 可以验证这与定理 25.10 的对特征标表的描述相符合.

$F_{13,4}$ 的特征标表

g_i	1	a	a^2	a^4	b	b^2	b^3
$\|C_G(g_i)\|$	52	13	13	13	4	4	4
χ_0	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	1	i	-1	$-i$
χ_2	1	1	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	1	1	$-i$	-1	i
ϕ_1	4	α	β	γ	0	0	0
ϕ_2	4	β	γ	α	0	0	0
ϕ_3	4	γ	α	β	0	0	0

第 25 章总结

1. 假设 p 是一个素数, 且 q 整除 $p-1$. 令 u 为 $\mathbb{Z}_p^*$ 的一个 q 阶元. 那么

$$F_{p,q} = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle.$$

$F_{p,q}$ 的不可约特征标如定理 25.10 所述.

2. 令 p 和 q 为素数, 且 $p > q$. 若 G 为 pq 阶, 那么或者 G 是交换群或者 $G \cong F_{p,q}$.

第 25 章习题

1. 令 p 为一个素数. 证明

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_p^*, y \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

在矩阵乘法下是一个阶为 $p(p-1)$ 的群.

2. 写出 55 阶非交换群 $F_{11,5}$ 的特征标表.

3. 令 p, q 为正整数, 且 p 为素数, $q \mid p-1$. 令 u, v 为两个模 p 意义下阶为 q 的整数, 定义

$$G_1 = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle,$$
$$G_2 = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^v \rangle.$$

证明 $G_1 \cong G_2$.

(这验证了 25.6 中 $F_{p,q}$ 的定义后的注解.)

4. 假设 p 为 $\neq 2$ 的一个素数. 令 $q = (p-1)/2$, 且

$$G = F_{p,q} = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle,$$

其中 u 为一个模 p 意义下阶为 q 的元素.

(a) 证明存在一个整数 m 使得 $u^m \equiv -1 \text{ mop } p$ 当且仅当 $p \equiv 1 \bmod 4$.

(b) 推导出 a 与 a^{-1} 共轭当且仅当 $p \equiv 1 \bmod 4$.

(c) 用列正交关系说明 G 的两个次数为 q 的不可约特征标 ϕ_1, ϕ_2 在 a 上取值为

$$\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{(\delta p)}),$$

其中 $\delta = 1$ 若 $p \equiv 1 \bmod 4$, $\delta = -1$ 若 $p \equiv -1 \bmod 4$.

(d) 推断出若 $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$, 则有

$$\sum_{s \in Q} \varepsilon^s = (-1 \pm \sqrt{(\delta p)}),$$

其中 Q 是模 p 二次剩余的集合 (也就是 $Q = \{1^2, 2^2, \ldots, ((p-1)/2)^2\}$).

5. 令 E 为由习题 5.4 中

$$E = \langle a, b, c : a^3 = b^3 = c^2 = 1, ab = ba, c^{-1}ac = a^{-1}, c^{-1}bc = b^{-1} \rangle$$

给定的 18 阶群. 记 $\langle a, b \rangle$ 为 E 的同构于 $C_3 \times C_3$ 的一个正规子群. 通过这个子群的诱导线性特征标, 得到 E 的特征标表.

6. 证明对习题 5 中的群 E, 有 $Z(E)$ 为循环群, 但 E 没有忠实的不可约表示 (因此, E 就为命题 9.16 的逆命题提供了一个反例).

7. (a) 找到一个群, 使得它的不可约特征标的次数为

$$1, 1, 1, 3, 3, 3, 3.$$

(b) 找到一个群, 使得它的不可约特征标的次数为

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3.$$

(c) 找到一个群, 使得它的不可约特征标的次数为

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6.$$

8. 令 G 为由

$$G = \langle a, b : a^9 = b^6 = 1, b^{-1}ab = a^2 \rangle$$

给定的 54 阶群. 给出 G 的特征标表.

第26章　某些 p-群的特征标

在这一章中, p 表示一个素数. 我们将会说明如何得到阶为 p^n(其中 $n \leqslant 4$) 的所有群的特征标表. 方法是找出那些存在一个指数为 p 的交换子群的 p-群的特征标. 在介绍这个方法之前我们将会说明所有的阶为 p^n(其中 $n \leqslant 4$) 的群确实含有一个指数为 p 的交换子群. 之后将会具体给出所有的阶为 p^3 的群的不可约的特征标及所有的阶为 16 的群的不可约的特征标. 在这一章的结尾我们指出, 结合相应的参考文献, 已经找到了阶数小于 32 的所有的群的特征标表.

p-群的基本性质

p-群是指阶数为一个素数 p 的幂次的群. 在第一个引理中我们列出 p-群的几个有名的性质. 回忆 $Z(G)$ 表示 G 的中心 (见定义 9.15).

26.1　引理

令 G 是一个阶为 p^n 的群 (其中 $n \geqslant 1$).

(1) 如果 $\{1\} \neq H \lhd G$, 那么 $H \cap Z(G) \neq \{1\}$. 特别地, $Z(G) \neq \{1\}$.

(2) 如果 $K \leqslant Z(G)$ 并且 G/K 是循环的, 那么 G 是交换群.

(3) 如果 $n \leqslant 2$, 那么 G 是交换群.

证明　(1) 因为 $H \lhd G$, 所以 H 是 G 的共轭类的并, 并且这些共轭类的大小都是 p 的幂次, $H \cap Z(G)$ 包含了 H 中大小为 1 的共轭类. 因此

$$|H| = |H \cap Z(G)| + (p \text{ 的倍数}).$$

因为 $|H|$ 是 p 的倍数, 并且有 $|H \cap Z(G)| \neq 0$, 所以有 $H \cap Z(G) \neq \{1\}$.

(2) 假设 G/K 是由 gK 生成的循环群. 令 $x_1, x_2 \in G$. 那么存在整数 i, j 和 $k_1, k_2 \in K$ 使得 $x_1 = g^i k_1, x_2 = g^j k_2$. 因为 $k_1, k_2 \in Z(G)$, 所以有 $x_1 x_2 = x_2 x_1$. 因此 G 是交换群.

(3) 由 (1) 有 $|G/Z(G)| \leqslant p^{n-1}$. 因此, 如果 $n \leqslant 2$, 那么 $G/Z(G)$ 是循环群, 所以由 (2) 知 G 是交换群. 证毕.

26.2 引理

令 G 是一个阶为 p^n 的群 (其中 $1 \leqslant n \leqslant 4$). 那么 G 含有一个指数为 p 的交换子群.

证明 如果 $n=1$ 那么结论显然成立. 所以假设 $2 \leqslant n \leqslant 4$.

假设 $Z(G)$ 含有一个阶为 p^{n-2} 的子群 K. 那么可以找到一个 G 的子群 H 使得 $K \leqslant H$ 并且有 $|H| = p^{n-1}$.[①]**(由于 $|G/Z(G)| = p^2$, 从而它是一个交换群, 所以必存在一个 p 阶元 $g \in G/Z(G)$, 因此群 $\langle g \rangle Z(G)$ 即为所找的群 H.)** 因为 $K \leqslant Z(H)$, 那么由引理 26.1(2) 有 $H/Z(H)$ 的阶不是 p, 所以有 $Z(H) = H$. 因此 H 是 G 的一个指数为 p 的交换子群.

现在假设 $Z(G)$ 不含有阶为 p^{n-2} 的子群. 根据引理 26.1(1) 有 $Z(G) \neq \{1\}$, 所以唯一的情况就是 $|G| = p^4, |Z(G)| = p$.[②]**(当 $|G| = p^2$ 时, $\{1\}$ 就是 $Z(G)$ 中阶数为 p^{2-2} 的子群, 从而与假设不符, 即 $|G| \neq p^2$; 当 $|G| = p^3$ 时, 根据 26.1(1) 可知 $Z(G) \neq \{1\}$, 因此 $Z(G)$ 必为一个阶数大于等于 p 的交换群, 从而在 $Z(G)$ 中存在一个阶数为 p^{3-1} 的子群, 与假设不符, 因此 $|G| \neq p^3$; 综上可知, 只有一种可能, 即 $|G| = p^4, |Z(G)| = p$.)** 那么由习题 12.7 知 G 含有一个元素 x, 这个元素的共轭类 x^G 的大小是 p. 令 $H = C_G(x)$. 那么由定理 12.8 知 $|H| = |G|/|x^G| = p^3$. 更近一步地, $Z(G)$ 和 $\langle x \rangle$ 是 $Z(H)$ 的两个不同的非单位子群, 所以 $|Z(H)| \geqslant p^2$. 因此由 26.1(2) 可得 $Z(H) = H$, 从而可知 H 是 G 的一个指数为 p 的交换子群. 证毕.

为了研究 p-群结构的最后一个结论, 我们现在来回忆一下 G 的导群是由 G' 来表示 (见定义 17.7).

26.3 引理

令 G 是一个含有一个指数为 p 的交换子群 H 的非交换 p-群. 那么存在 G 的一个阶数为 p 的正规子群 K 使得

$$K \leqslant H \cap G' \cap Z(G) \quad \text{且 } |K| = p.$$

证明 因为 G 是非交换的, 有 $\{1\} \neq G' \lhd G$, 因此由引理 26.1(1) 有

$$G' \cap Z(G) \neq \{1\}.$$

令 K 是 $G' \cap Z(G)$ 中阶数为 p 的一个子群. 现在由 $K \leqslant Z(G)$ 可以推出 $K \lhd G$ 并且 KH 是 G 的一个交换的子群 (其中 $KH = \{kh : k \in K, h \in H\}$). 因为 G 是非交换的, 并且 $|G:H| = p$, 所以有 $KH = H$, 因此 $K \leqslant H$. 证毕.

---

① 黑体部分为译者补充的证明过程以便读者阅读.

② 黑体部分为译者补充的证明过程以便读者阅读.

含有一个指数为 p 的交换子群的 p-群的特征标

根据引理 26.2, 下面的定理给出了阶数为 p^3 或 p^4 的非交换的群的所有不可约特征标.

26.4　定理

假设 G 是一个含有一个指数为 p 的交换子群 H 的非交换 p-群. 令 K 是在引理 26.3 中出现的 G 的一个正规子群. 那么 G 的每个不可约的特征标只可能由如下两种情况给出:

(1) 要么它是 G/K 的不可约的特征标的提升;

(2) 要么它是 $\psi\uparrow G$, 其中 ψ 是满足 $K\not\leqslant \mathrm{Ker}\psi$ 的 H 的某个线性特征标.

证明　令 $|G|=p^n$. 由定理 17.3 知 G/K 的不可约的特征标的提升正好给出了 G 的那些核中含有 K 的不可约的特征标. 由定理 11.12 知用这种方式得到的不可约的特征标的次数的平方和是 $|G/K|=p^{n-1}$.

我们将会找到余下的 $p^{n-2}-p^{n-3}$ 个 G 的不可约的特征标, 并且每个的次数都为 p, 这是因为

$$(*)\qquad p^{n-1}+(p^{n-2}-p^{n-3})p^2=p^n=|G|,$$

那么还是由定理 11.12 就找到了 G 的所有不可约的特征标.

首先注意到如果 χ 是 G 的一个次数为 p 的特征标, 那么或者 χ 是不可约的或者 χ 是线性特征标的和 (因为由定理 22.11 知 G 的每个不可约的特征标的次数是 p 的幂次). 对于后一种情况有 $G'\leqslant \mathrm{Ker}\chi$, 这是因为 G' 包含在每个线性特征标的核中, 所以 $K\leqslant G'\leqslant \mathrm{Ker}\chi$. 这样有

(26.5)　　如果 $\chi(1)=p$,　$K\not\leqslant \mathrm{Ker}\chi$,　那么 χ 是不可约的.

由定理 9.8 知交换群 H 的所有的 p^{n-1} 个不可约的特征标是线性特征标. 令 Φ 表示 H 的那些核中不含有 K 的线性特征标组成的集合. 因为 H 的那些核中含有 K 的线性特征标正好是 H/K 的线性特征标的提升, 所以有

$$|\Phi|=p^{n-1}-p^{n-2}.$$

令 $\psi\in\Phi$. 由命题 21.23, 因为 $K\leqslant Z(G)$, 对于所有的 $k\in K$ 有

$$(\psi\uparrow G)(k)=p\psi(k).$$

因此 $\psi\uparrow G$ 的次数为 p 并且它的核中不含有 K. 因此由 (26.5), $\psi\uparrow G$ 是 G 的一个不可约的特征标.

现在假设 ψ_1 是 H 的一个线性特征标使得 $\psi\uparrow G=\psi_1\uparrow G$. 那么由 Frobenius 互反律 21.16 有

$$1=\langle\psi\uparrow G,\psi_1\uparrow G\rangle_G=\langle(\psi\uparrow G)\downarrow H,\psi_1\rangle_H.$$

因为 $(\psi\uparrow G)\downarrow H$ 的次数是 p, 所以这表示至多有 p 个 Φ 中的元素 ψ_1 使得下式成立:

$$\psi_1\uparrow G=\psi\uparrow G.$$

所以 $\{\psi\uparrow G:\psi\in\Phi\}$ 至少给出了 $|\Phi|/p=(p^{n-1}-p^{n-2})/p$ 个不同的 G 的次数为 p 的不可约特征标, 并且这些特征标的核中都不含有 K. 再根据 $(*)$ 式我们知道 G 至多含有 $p^{n-2}-p^{n-3}$ 个这样的特征标. 因此 $\{\psi\uparrow G:\psi\in\Phi\}$ 正好包含了我们找到的这 $p^{n-2}-p^{n-3}$ 个不可约特征标. 证毕.

现在利用定理 26.4 来给出阶数为 p^3 的非交换群的不可约特征标的具体形式. 然后通过建立阶数为 16 的所有的非交换群的特征标表来进一步地说明定理 26.4.

阶数为 p^3 的群

由定理 9.6 我们知道阶数为 p^3 的交换群有

$$C_{p^3},C_{p^2}\times C_p,C_p\times C_p\times C_p.$$

这些群的特征标表已经在定理 9.8 中给出.

现在令 G 是一个阶数为 p^3 的非交换群. 记 $Z=Z(G)$. 由引理 26.1 我们知道 $Z\neq\{1\}$ 并且 G/Z 非循环群. 因此 $G/Z\cong C_p\times C_p, Z=\langle z\rangle\cong C_p$. 选择 aZ,bZ 使得 $G/Z=\langle aZ,bZ\rangle$. 那么

$$G/Z=\{a^rb^sZ:0\leqslant r\leqslant p-1,0\leqslant s\leqslant p-1\}.$$

特别地, G 的每个元素的形式都是存在某个 r,s,t (其中 $0\leqslant r,s,t\leqslant p-1$),

$$a^rb^sz^t.$$

26.6 定理

令 $G=\{a^rb^sz^t:0\leqslant r,s,t\leqslant p-1\}$ 就是上面那种形式的阶数为 p^3 的非交换群. 记 $\varepsilon=e^{2\pi i/p}$. 那么 G 的不可约的特征标是

$$\chi_{u,v}\ (0\leqslant u\leqslant p-1,0\leqslant v\leqslant p-1)\quad 或者\quad \phi_u\ (1\leqslant u\leqslant p-1),$$

其中对于所有的 r, s, t 有

$$\chi_{u,v}(a^r b^s z^t) = \varepsilon^{ru+sv},$$

$$\phi_u(a^r b^s z^t) = \begin{cases} p\varepsilon^{ut}, & r = s = 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明　由定理 9.8 我们知道 G/Z 的不可约的特征标是 $\psi_{u,v}$ $(0 \leqslant u \leqslant p-1, 0 \leqslant v \leqslant p-1)$, 其中 $\psi_{u,v}(a^r b^s Z^t) = \varepsilon^{ru+sv}$. $\psi_{u,v}$ 到 G 的提升就是这个定理中出现的线性特征标 $\chi_{u,v}$.

令 $H = \langle a, z \rangle$, 所以 H 是一个阶数为 p^2 的交换子群. 对于 $1 \leqslant u \leqslant p-1$, 选择 H 的一个满足下式的特征标 ψ_u:

$$\psi_u(a^i z^t) = \varepsilon^{ut} \quad (0 \leqslant t \leqslant p-1, 0 \leqslant i \leqslant p-1)^{①}$$

计算 $\psi_u \uparrow G$.

令 r 是一个整数, 其中 $1 \leqslant r \leqslant p-1$. 如果 a^r 与 G 中的一个元素 g 共轭, 那么在交换群 G/Z 中 $a^r Z$ 与 gZ 共轭, 所以 $a^r Z = gZ$. 因此存在某个 t 使得 $g = a^r z^t$. 因为 $a^r \notin Z$, 共轭类 $(a^r)^G$ 的大小不是 1, 因此 $(a^r)^G = \{a^r z^t : 0 \leqslant t \leqslant p-1\}$. 那么由命题 21.23 有

$$\begin{aligned} \psi_u \uparrow G(a^r z^t) &= \psi_u(a^r) + \psi_u(a^r z) + \ldots + \psi_u(a^r z^{p-1}) \\ &= \psi_u(a^r) \sum_{s=0}^{p-1} \psi_u(z^s) \\ &= \psi_u(a^r) \sum_{s=0}^{p-1} \varepsilon^{us} \\ &= 0. \end{aligned}$$

同时有

$$(\psi_u \uparrow G)(z^t) = p\psi_u(z^t) = p\varepsilon^{ut}, \quad (\psi_u \uparrow G)(g) = 0 \quad \text{若} \quad g \notin H.$$

现在已经说明了如果 $\phi_u = \psi_u \uparrow G$, 那么 ϕ_u 的值就是这个定理中陈述的那样.

我们发现

① 原书为“$\psi_u(z^t) = \varepsilon^{ut}$ $(0 \leqslant t \leqslant p-1)$”, 译者修正为“$\psi_u(a^i z^t) = \varepsilon^{ut}$ $(0 \leqslant t \leqslant p-1, 0 \leqslant i \leqslant p-1)$”.

$$\begin{aligned}\langle \phi_u, \phi_u \rangle G &= \frac{1}{p^3} \sum_{g \in G} \phi_u(g) \overline{\phi_u(g)} \\ &= \frac{1}{p^3} \sum_{g \in Z} \phi_u(g) \overline{\phi_u(g)} \\ &= \frac{1}{p^3} \sum_{g \in Z} p^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

因此 ϕ_u 是不可约的.

很显然有不可约特征标 $\chi_{u,v}$ $(0 \leqslant u \leqslant p-1, 0 \leqslant v \leqslant p-1)$ 和 ϕ_u $(1 \leqslant u \leqslant p-1)$ 是互不相同的, 并且它们的次数的平方和是 $p^2 \cdot 1^2 + (p-1) \cdot p^2 = |G|$. 因此已经找到了 G 的所有的不可约的特征标. 证毕.

注意到定理 26.6 证明中的计算过程就是定理 26.4 的证明的一个特殊的情况 $(K = Z(G))$.

事实上, 在同构的意义下, 有且仅有两个阶数为 p^3 的非交换的群. 如果 $p = 2$, 那么它们分别是 D_8 和 Q_8. 如果 p 是奇数, 那么它们是 H_1 和 H_2, 其中

(26.7)
$$H_1 = \langle a, b : a^{p^2} = b^p = 1, b^{-1}ab = a^{p+1} \rangle,$$

$$H_2 = \langle a, b, z : a^p = b^p = z^p = 1, az = za, bz = zb, b^{-1}ab = az \rangle.$$

有 $Z(H_1) = \langle a^p \rangle, Z(H_2) = \langle z \rangle$. H_1 和 H_2 中的元素 a, b 将会对选择定理 26.6 中的元素 a, b 起到作用.

26.8　阶数为 16 的群

我们知道, 在同构的意义下, 有且仅有 14 个阶数为 16 的群 (参见参考文献中列出的由 Coxeter 和 Moser[1] 写的书的第 134 页). 现在描述这些群并给出它们的特征标表.

由定理 9.6 我们知道, 16 阶的交换群是下面的这几种情况:

$$C_{16}, C_8 \times C_2, C_4 \times C_4, C_4 \times C_2 \times C_2, C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2,$$

并且它们的特征标表在定理 9.8 中已经给出.

对于余下的 9 个 16 阶的非交换群一定有 $|G' \cap Z(G)| = 2$(参见习题 26.7), 所以在引理 26.3 中出现的子群 K 就是由如下式子给出:

$$K = G' \cap Z(G).$$

现在 G/K 是一个 8 阶群, 并且由引理 26.1(2) 我们知道它不是 C_8, 再由习题 26.8 我们知道它不是 Q_8. 因此

$$G/K \cong D_8, C_4 \times C_2, C_2 \times C_2 \times C_2.$$

所以根据 G/K 的这三种情况, 将分成 3 个部分来说明. 我们将给出它们的表示, 应用习题 26.5 我们看到所有的下面给出的 9 个群 $G_1, ..., G_9$ 的阶都是 16.

(A) 有 3 个非交换的 16 阶群 G 使得 $G/K \cong D_8$. 它们是

$$G_1 = \langle a, b : a^8 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle = D_{16},$$

$$G_2 = \langle a, b : a^8 = 1, b^2 = a^4, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle,$$

$$G_3 = \langle a, b : a^8 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^3 \rangle.$$

每种情况下都有 $K = \langle a^4 \rangle$. 每个群都有 7 个共轭类 $C_1, ..., C_7$, 把它们列在下表中:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
G_1, G_2	1	a^4	a^2, a^6	a, a^7	a^3, a^5	a^ib (i 是偶数)	a^ib (i 是奇数)
G_3	1	a^4	a^2, a^6	a, a^3	a^5, a^7	a^ib (i 是偶数)	a^ib (i 是奇数)

利用定理 26.4 得到了 G_1, G_2 和 G_3 的特征标表:

共轭类	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
中心化子阶数	16	16	8	8	8	4	4
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	-1	-1
	1	1	1	-1	-1	1	-1
	1	1	1	-1	-1	-1	1
	2	2	-2	0	0	0	0
	2	-2	0	α	β	0	0
	2	-2	0	β	α	0	0

其中对于 G_1, G_2 来说有 $\alpha = \sqrt{2} = -\beta$, 对于 G_3 来说有 $\alpha = i\sqrt{2} = -\beta$.

前 5 个特征标是 $G/K \cong D_8$ 的不可约的特征标的提升. 后两个特征标是通过定理 26.4(2) 得到的诱导特征标 $\psi \uparrow G$, 其中 ψ 是指数为 2 的交换子群 $\langle a \rangle$ 的一个线性特征标 (后两个特征标也可以通过列正交关系得到). 注意到在 G_1, G_2 中有 a 和 a^{-1} 共轭, 但是在 G_3 中 a 和 a^{-1} 并不共轭, 所以对于 G_1, G_2 来说, 列 C_4, C_5 中的值全是实数, 但是对 G_3 来说并不成立 (参见推论 15.6).

(B) 有且仅有 3 个非交换的 16 阶群 G 使得 $G/K \cong C_4 \times C_2$(其中像前面一样有 $K = G' \cap Z(G)$ 且 K 是 2 阶群). 它们是

$$G_4 = \langle a, b, z : a^4 = z, b^2 = z^2 = 1, b^{-1}ab = az \rangle,$$

$$G_5 = \langle a, b, z : a^4 = 1, b^2 = z, z^2 = 1, b^{-1}ab = az \rangle,$$

$$G_6 = \langle a, b, z : a^4 = 1, b^2 = z^2 = 1, b^{-1}ab = az, az = za, bz = zb \rangle.$$

以上给出的这些表示可能看起来有些复杂 (例如, 因为在 G_4 中有 $a^4 = z$, 所以 z 是冗余的), 但是这样的表示却可以让我们同时对 3 个群 G_4, G_5 和 G_6 来描述共轭类 $C_1, ..., C_{10}$:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
1	z	a^2	a^2z	a, az	a^3, a^3z	b, bz	a^2b, a^2bz	ab, abz	a^3b, a^3bz

每种情况下都有 $K = \langle z \rangle$. 利用定理 26.4 得到了 G_4, G_5 和 G_6 的特征标表:

共轭类	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
中心化子阶数	16	16	16	16	8	8	8	8	8	8
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	-1	-1	i	$-i$	1	-1	i	$-i$
	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	-1	$-i$	i	1	-1	$-i$	i
	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	1	1	-1	-1	i	$-i$	-1	1	$-i$	i
	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	1	1	-1	-1	$-i$	i	-1	1	i	$-i$
	2	-2	α	β	0	0	0	0	0	0
	2	-2	β	α	0	0	0	0	0	0

其中对于 G_4 来说有 $\alpha = 2i = -\beta$, 对于 G_5, G_6 来说有 $\alpha = 2 = -\beta$.

(C) 最后, 有且仅有 3 个非交换的 16 阶群 G 使得 $G/K \cong C_2 \times C_2 \times C_2$(其中 $K = G' \cap Z(G)$ 且 K 是 2 阶群). 它们是

$$G_7 = \langle a, b, z : a^4 = b^2 = z^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}, az = za, bz = zb \rangle \cong D_8 \times C_2,$$

$$G_8 = \langle a, b, z : a^4 = z^2 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}, az = za, bz = zb \rangle \cong Q_8 \times C_2,$$

$$G_9 = \langle a, b, z : a^2 = b^2 = z^4 = 1, b^{-1}ab = az^2, az = za, bz = zb \rangle.$$

那么对于 G_7, G_8 来说这 10 个共轭类如下给出:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
1	a^2	z	a^2z	a, a^3	az, a^3z	b, a^2b	bz, a^2bz	ab, a^3b	abz, a^3bz

对于 G_9 来说这 10 个共轭类如下给出:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
1	z^2	z	z^3	a, az^2	az, az^3	b, bz^2	bz, bz^3	ab, abz^2	abz, abz^3

其中对于 G_7, G_8 来说有 $K = \langle a^2 \rangle$, 对于 G_9 来说有 $K = \langle z^2 \rangle$. 利用定理 26.4 得到了 G_7, G_8 和 G_9 的特征标表:

共轭类	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
中心化子阶数	16	16	16	16	8	8	8	8	8	8
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	2	-2	α	β	0	0	0	0	0	0
	2	-2	β	α	0	0	0	0	0	0

其中对于 G_7, G_8 来说有 $\alpha = 2 = -\beta$, 对于 G_9 来说有 $\alpha = 2i = -\beta$.

26.9 阶数小于 32 的群

$\|G\|$	G	特征标表参见
6	$F_{3,2} \cong D_6$	定理 25.10
8	Q_8	习题 17.1
10	$F_{5,2} \cong D_{10}$	定理 25.10
12	A_4	18.2
	T_{12}	习题 18.3
14	$F_{7,2} \cong D_{14}$	定理 25.10
16	$G_1, ..., G_9$	26.8
18	$D_6 \times C_3$	定理 19.18
	E	习题 25.5
20	T_{20}	习题 18.3
	$F_{5,4}$	定理 25.10
21	$F_{7,3}$	定理 25.10

续表

$\|G\|$	G	特征标表参见
22	$F_{11,2} \cong D_{22}$	定理 25.10
24	$D_{12} \times C_2, A_4 \times C_2, T_{12} \times C_2$	定理 19.18
	$D_8 \times C_3, Q_8 \times C_3, D_6 \times C_4$	定理 19.18
	S_4	18.1
	$SL(2,3)$	习题 27.2
	T_{24}	习题 18.3
	U_{24}	习题 18.4
	V_{24}	习题 18.5
26	$F_{13,2} \cong D_{26}$	定理 25.10
27	H_1, H_2	定理 26.6
28	T_{28}	习题 18.3
30	$D_6 \times C_5, D_{10} \times C_3$	定理 19.18

至此, 我们已经建立了所有的阶数小于 32 的群的特征标表. 除了交换群 (它的特征标表已经在定理 9.8 中给出)①, 其他的群如表所示.

第 26 章总结

在这一章中, 我们给出了非交换的不同的 p-群的所有不可约的特征标, 如下:

1. 定理 26.4: 包含一个指数为 p 的交换子群的 p-群.
2. 定理 26.6: 阶数为 p^3 的群.
3. 定理 26.8: 阶数为 16 的群.

第 26 章习题

1. 假设 G 是一个阶数为 p^n 的群, 其中 p 是素数且 $n \geqslant 2$, 并且它有一个指数为 p 的交换子群 H. 证明存在某个整数 $m \geqslant 2$ 使得 G 有 p^m 个线性特征标和 $p^{n-2} - p^{m-2}$ 个次数为 p 的不可约的特征标.

2. 令 H 是如下给出的 27 阶群:

$$H = \langle a, b, z : a^3 = b^3 = z^3 = 1, az = za, bz = zb, b^{-1}ab = az \rangle$$

(见 (26.7)). 找出 H 的共轭类, 并且利用定理 26.6 写出 H 的特征标表.

3. 令 G 是如下给出的 32 阶群:

$$G = \langle a, b : a^{16} = 1, b^2 = a^8, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

① 译者把几个与二面体群同构的 $F(p, q)$ 群加入表格, 这样一来结构更明显, 从而表格中除了交换群以外均已列出以便读者阅读.

利用定理 26.4 或者其他方法写出 G 的特征标表.

4. 令 A, B, C, D 是如下的 4×4 阶矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}0&i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&-i&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

令 $G=\langle A,B,C,D\rangle$. 记 $Z=-I$.

(a) 证明所有的生成元对与模 $\langle Z\rangle$ 交换, 由此证明 $G'=\langle Z\rangle$.

(b) 证明对于所有的 $g\in G$ 有 $g^2\in\langle Z\rangle$, 由此证明 G 是一个阶数至多为 32 的 2-群.

(c) 证明给出的次数为 4 的 G 的表示是不可约的 (提示: 利用推论 9.3).

(d) 证明 $|G|=32$, 并找出 G 的所有的不可约的表示.

5. 令 $G_1,\dots,G_9$ 是文中给出的非交换的 16 阶的群.

(a) 找出 G_1,G_2,G_3,G_4,G_9 的次数为 2 的不可约的忠实表示.

(b) 说明为什么余下的 G_5,G_6,G_7,G_8 没有不可约的忠实表示.

(c) 证明如下映射给出了 G_5 和 G_6 的忠实表示:

$$G_5: a\mapsto\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&i\end{pmatrix},\quad b\mapsto\begin{pmatrix}i&0&0\\0&-i&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad z\mapsto\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$G_6: a\mapsto\begin{pmatrix}i&0&0\\0&-i&0\\0&0&i\end{pmatrix},\quad b\mapsto\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad z\mapsto\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(d) 找出 $G_7\cong D_8\times C_2$ 和 $G_8\cong Q_8\times C_2$ 的次数为 3 的忠实表示.

(注记: 这个练习题可以用来证实文中给出的 $G_1,\dots,G_9$ 的表示确实给出了 16 阶的群).

6. 证明 $G_1,\dots,G_9$ 两两不同构.

7. 假设 G 是一个阶数为 p^4 的非交换群.

(a) 证明 $|Z(G)|=p$ 或 $|Z(G)|=p^2$. 并且如果 $|Z(G)|=p^2$, 那么 G 含有 p^3+p^2-p 个共轭类.

(b) 证明 $|G'|=p$ 或 p^2. 并且如果 $|G'|=p^2$, 那么 G 含有 $2p^2-1$ 个共轭类.

(c) 证明 $|G'\cap Z(G)|=p$.

8. (a) 证明如果 G 是任意群, 那么 $G/Z(G)\not\cong Q_8$ (提示: 假设 $G/Z=\langle aZ,bZ: a^4\in Z, a^2\equiv b^2 \bmod Z, b^{-1}ab\equiv a^{-1} \bmod Z\rangle$. 证明 a^2 可以与 b 交换, 因此有 $a^2\in Z$).

(b) 根据习题 7 的结果证明如果 G 是一个阶数为 16 的群, 那么 $G/(G'\cap Z(G))\not\cong Q_8$.

第 27 章　168 阶单群的特征标表

群 G 被称为单群是指它除了 $\{1\}$ 及其自身之外没有其他的正规子群. 在本书的第 1 章简单地描述了有限单群在有限群理论中的重要性. 到目前为止我们接触到的有限单群包括素数阶循环群, A_5 以及 A_6. 事实上, A_5 阶数为 60, 且它是阶数最小的非交换单群. 阶数第二小的非交换单群的阶数为 168, 我们将在本章中刻画这个群, 并构造它的特征标表. 由于这个群属于一大类单群, 所以首先讨论这一类群.

特殊线性群

假设 p 是一个素数, $\mathbb{Z}_p$ 表示模 p 同余类形成的域 $\mathbb{Z}_p=\{0,\cdots,p-1\}$. $SL(2,p)$为所有元素取自 $\mathbb{Z}_p$ 且行列式为 1 的 2×2 阶矩阵 M 形成的集合. 则 $SL(2,p)$ 在通常的矩阵乘法意义下形成一个群, 称这个群为在 $\mathbb{Z}_p$ 上的 2-维特殊线性群.

为了求 $SL(2,p)$ 的阶数, 计算满足下列条件的矩阵个数

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a,b,c,d\in\mathbb{Z}_p, ad-bc=1).$$

若 $c=0$, 则 a,b,d 共有 $p(p-1)$ 种选择使得 $ad-bc=1$(由于除了 $a\neq 0$ 之外 a,b 可以任意选择; 且 d 的值由 a 所决定). 当 $c\neq 0$ 时, 对于 a,b,c,d 总共有 $p^2(p-1)$ 种选择使得 $ad-bc=1$(由于 a,d 可以任意选择, c 是 $\mathbb{Z}_p$ 中的任意的非零元素; 从而 b 的值被它们确定). 因此

$$\begin{aligned}|SL(2,p)|&=p(p-1)+p^2(p-1)\\&=p(p^2-1).\end{aligned}$$

若 $p=2$, 则 $SL(2,p)$ 的阶数为 6, 并且容易证明这个群与 S_3 同构; 因此假设 p 是一个奇素数. 根据习题 27.1, $SL(2,p)$ 的中心为

$$Z=\{I,-I\}$$

(其中 I 为 2×2 阶单位阵). 商群 $SL(2,p)/Z$ 被称为 2-维投射特殊线性群, 并将它记为 $PSL(2,p)$. 从而

$$PSL(2,p)=SL(2,p)/\{\pm I\}.$$

由于 $|SL(2,p)| = p(p^2-1)$, 故

$$|PSL(2,p)| = p(p^2-1)/2.$$

已知 $PSL(2,3) \cong A_4, PSL(2,5) \cong A_5$, 且当 $p \geqslant 5$ 时, $PSL(2,p)$ 都是单群, 这些都是经典结果 (见参考文献 J. J. Rotman[7] 的书中定理 8.19).

单群 $G = PSL(2,7)$的阶数为 168, 将在本章构造它的特征标表. 在得到该群的共轭类之后, 将只运用数值计算的方法 (尤其是定理 16.4 的正交关系和推论 22.26 中的同余性质) 来构造群 G 的特征标表. 从而显示出了这些方法的强大功能. 在习题中将指出也可以运用子群的信息来求解该群的特征标表.

$PSL(2,7)$ 的共轭类

27.1　引理

群 $PSL(2,7)$ 共有六个共轭类. 下表给出了共轭类代表元 $g_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$,$g_i$ 的阶数, 中心化子 $C_G(g_i)$ 的阶数以及包含 g_i 的共轭类的大小.

	g_i的阶数	$\lvert C_G(g_i)\rvert$	$\lvert g_i^G\rvert$
$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z$	1	168	1
$g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z$	2	8	21
$g_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} Z$	4	4	42
$g_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Z$	3	3	56
$g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z$	7	7	24
$g_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z$	7	7	24

证明　对于每一个 i, g_i 的编号如上所述, 现在通过直接计算来寻找所有与 g_i 可交换的元素. 下面以 g_4 为例进行分析. 假设

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Z$$

与 g_4 可交换. 则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

因此 $b = c = 0$. 从而可知

$$C_G(g_4) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Z, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}Z, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}Z\right\}.$$

同样地,

$$C_G(g_2) = \left\{MZ : M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

并且通过计算可得 $C_G(g_i) = \langle g_i \rangle$, 其中 $i = 3, 5, 6$.

在 $g_1, \cdots, g_6$ 中阶数相同的元素只有两个, 即 g_5 与 g_6; 因此这六个元素除了这两个元素有可能共轭外, 其他的元素必然互不共轭. 假设 $g^{-1}g_6g = g_5$, 其中

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}Z \in G.$$

则 $gg_5 = g_6g$, 因此

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$$

(其中 $ad - bc = 1$). 从而可知 $c = 0, a \neq 0, d = a^{-1}$ 且

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-a^{-1} \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

从而可知 $a^2 = -1$, 但是该元素 a 不在 $\mathbb{Z}_7$ 中, 因此 g_5 与 g_6 不可能共轭. 从而 $g_1, \cdots, g_6$ 中的任意两个元素均不共轭.

共轭类 g_i^G 的大小可以通过 168 除以 $|C_G(g_i)|$ 得到 (定理 12.8). 并且通过计算可知, $g_i^G (1 \leqslant i \leqslant 6)$ 中的元素个数之和为 168, 因此它们是 G 中的所有共轭类. 证毕.

根据引理 27.1, 容易验证群 G 是一个单群, 因为任意一个正规子群必为一些共轭类的并 (见命题 12.19).

27.2　推论

(1) 假设 $1 \leqslant i \leqslant 4$ 且 χ 是群 G 的一个特征标, 则 $\chi(g_i)$ 为整数.

(2) 存在群 G 的一些特征标 χ, 使得 $\chi(g_5)$ 不是实数.

证明　(1) 根据引理 27.1, 当 $1 \leqslant i \leqslant 4$ 时, 若 g_i 与 $(g_i)^k$ 的阶数相同, 则 g_i 与 $(g_i)^k$ 共轭. 因此根据定理 22.16 可知结论成立.

(2) 由于 $g_6 = g_5^{-1}$, 所以 g_5 与它的逆元并不共轭, 从而根据推论 15.6 可知结论成立. 证毕.

$PSL(2,7)$ 的特征标表

由于 G 共有六个共轭类, 所以它也有六个不可约特征标, 假设 $\chi_1, \cdots, \chi_6$ 是 G 的不可约特征标, 其中 χ_1 是平凡特征标 (对所有的 $g \in G$, 有 $\chi_1(g) = 1$). 记特征标表所对应的 6×6 阶矩阵的 ij-位置上的元素为 $\chi_i(g_j)$.

下面将要频繁地用到定理 16.4(2) 中的列正交关系, 推论 22.26, 22.27 的同余关系以及推论 27.2 中给出的 g_2, g_3, g_4 在任意特征标上的值为整数的结论.

特征标表的 g_4 所对应的列均为整数, 并且这些整数的平方和为 $|C_G(g_4)| = 3$. 因此这些元素在不考虑顺序的情况下必为 $1, \pm1, \pm1, 0, 0, 0$(其中已知 $\chi_1(g_4) = 1$).

运用同样的方法可知 g_3 所在列在不考虑顺序的情况下值为 $1, \pm1, \pm1, \pm1, 0, 0$. g_2 所在列在不考虑顺序的情况下值为 $1, \pm1, \pm1, \pm1, \pm2, 0$. 从而根据推论 22.27, 对于群 G 的所有特征标 χ 有

$$\chi(g_2) \equiv \chi(1) \bmod 2, \text{且}$$

$$\chi(g_3) \equiv \chi(1) \bmod 2,$$

从而 $\chi(g_2) \equiv \chi(g_3) \bmod 2$. 由于根据列正交关系可知 $\sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_3)\chi_i(g_4) = 0$, 从而在不考虑特征标 $\chi_2, \ldots, \chi_6$ 具体编号的情况下, 得到群 G 的部分特征标表为

共轭类代表元 中心化子的阶数	g_2 8	g_3 4	g_4 3
χ_1	1	1	1
χ_2	±1	±1	±1
χ_3	0	0	±1
χ_4	±1	±1	0
χ_5	±1	±1	0
χ_6	±2	0	0

我们将在后面讨论上表中元素的正负号, 现在先确定每个不可约特征标的次数, 即特征标表的第一列 (也就是, 特征标次数 $\chi_i(1)$). 假设 $d_i = \chi_i(1)$, 则 d_i 即为特征标表中第 i 行第 1 列的元素. 根据推论 22.27, 定理 22.11 以及 $\sum_{i=1}^{6} d_i^2 = 168$, 可以得到

$$d_4 \equiv 0 \bmod 3,$$

$$d_4 \equiv 1 \bmod 2,$$

$$d_4 \text{整除} |G| = 168,$$

$$d_4^2 \leqslant 168.$$

唯一满足上述条件的正整数只有 3, 从而 $d_4 = 3$. 运用同样的方法可以得到 $d_5 = 3$. 再者, 对于 d_6 有

$$d_6 \equiv 0 \bmod 3,$$

$$d_6 \equiv 0 \bmod 2,$$

$$d_6 \text{ 整除 } 168,$$

$$d_6^2 \leqslant 168.$$

因此 d_6 的值为 6 或 12. 然而由于

$$0 = \sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_2) d_i = 1 \pm d_2 \pm 3 \pm 3 \pm 2d_6,$$

并且 $d_6^2 \leqslant 168$, 从而 $d_6 \neq 12$, 因此 $d_6 = 6$.

现在根据

$$1 + d_2^2 + d_3^2 + 3^2 + 3^2 + 6^2 = 168,$$

可知 $d_2^2 + d_3^2 = 113$. 因此在不考虑顺序的情况下 d_2, d_3 的值为 $7, 8$. 然而由于 $d_2 \equiv 1 \bmod 2$, 因此 $d_2 = 7, d_3 = 8$.

现在得到了特征标表的第一列, 所得的部分特征标表如下:

共轭类代表元	g_1	g_2	g_3	g_4
中心化子的阶数	168	8	4	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	7	± 1	± 1	± 1
χ_3	8	0	0	± 1
χ_4	3	± 1	± 1	0
χ_5	3	± 1	± 1	0
χ_6	6	± 2	0	0

方程 $\sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_1)\chi_i(g_j) = 0 \ (j = 2,3,4)$ 可以确定特征标表的第 2, 3, 4 中元素的正负号. 得到的结果如下表:

共轭类代表元	g_1	g_2	g_3	g_4
中心化子的阶数	168	8	4	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	-1	1
χ_3	8	0	0	-1
χ_4	3	-1	1	0
χ_5	3	-1	1	0
χ_6	6	2	0	0

再者, 根据方程

$$\begin{aligned} 1 = \langle \chi_2, \chi_2 \rangle &= \sum_{i=1}^{6} \frac{\chi_2(g_i)\overline{\chi_2(g_i)}}{|C_G(g_i)|} \\ &= \frac{7 \cdot 7}{168} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{\chi_2(g_5)\overline{\chi_2(g_5)}}{7} + \frac{\chi_2(g_6)\overline{\chi_2(g_6)}}{7} \end{aligned}$$

可知 $\chi_2(g_5) = \chi_2(g_6) = 0$. (注意到 $\chi_2(g_5) \equiv \chi_2(1) \bmod 7$, 但是因为我们不能保证 $\chi_2(g_5)$ 是一个整数, 所以我们不能用这个事实). 同样地, 对于 $j = 5, 6$ 有

$$0 = \sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_4)\chi_i(g_j) = 1 - \chi_3(g_j).$$

从而 $\chi_3(g_5) = \chi_3(g_6) = 1$.

根据推论 27.2 可知, 存在群 G 的不可约特征标 χ 使得 $\chi(g_5)$ 不是实数. 对于这个特征标 χ 而言, 它的共轭 $\overline{\chi}$ 是与它次数相同的不可约特征标. 根据已得的部分特征标表可知, 次数相同的特征标只有 χ_4, χ_5, 因此它们必为互相共轭的复特征标.

令 $\chi_4(g_5) = \overline{\chi_5(g_5)} = z, \chi_6(g_5) = t$. g_5 所在列是如下表:

类代表元	g_5
中心化子阶数	7
χ_1	1
χ_2	0
χ_3	1
χ_4	z
χ_5	$\bar{z}$
χ_6	t

则根据列正交关系可得

$$0 = \sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_2)\chi_i(g_5) = 1 - z - \overline{z} + 2t,$$

$$0 = \sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_3)\chi_i(g_5) = 1 + z + \overline{z},$$

$$7 = \sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_5)\overline{\chi_i(g_5)} = 2 + 2z\overline{z} + t\overline{t}.$$

通过解方程可知 $t = -1, z = (-1 \pm i\sqrt{7})/2$. 由于 $g_6 = g_5^{-1}$, 从而对于群 G 的所有特征标 χ, 有 $\chi(g_6) = \overline{\chi(g_5)}$.

从而得到了群 $G = PSL(2,7)$的特征标表如下 (其中 $\alpha = (-1 + i\sqrt{7})/2$):

共轭类代表元	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
中心化子的阶数	168	8	4	3	7	7
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	-1	1	0	0
χ_3	8	0	0	-1	1	1
χ_4	3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$
χ_5	3	-1	1	0	$\overline{\alpha}$	α
χ_6	6	2	0	0	-1	-1

已知阶数小于 1000 的非交换单群共有五个, 下表给出这些非交换单群的特征表:

G	G 的阶数	特征标表
A_5	60	例20.13
$PSL(2,7)$	168	本章
A_6	360	习题20.2
$PSL(2,8)$	504	习题28.3
$PSL(2,11)$	660	习题27.6

第 27 章总结

1. $SL(2,p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p, ad - bc = 1 \right\}$.

$$|SL(2,p)| = p(p^2 - 1).$$

2. $PSL(2,p) = SL(2,p)/\{\pm I\}$.

$$|PSL(2,p)| = p(p^2-1)/2 \ (p\text{为奇数}).$$

3. 我们构造了 168 阶单群 $PSL(2,7)$ 的特征标表.

第 27 章习题

1. 证明 $Z(SL(2,p)) = \{\pm I\}$.

2. 构造 $SL(2,3)$的特征标表.

3. 通过 $PSL(2,7)$的特征标表证明它是一个单群.

4. 在本习题中给出另一种构造 $PSL(2,7)$ 的特征标表的方法, 在这里假设群 G 的共轭类已知, 如引理 27.1.

(a) 定义群 G 的 21 阶子群 T 为

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} Z : a \in \mathbb{Z}_7^*, b \in \mathbb{Z}_7 \right\},$$

(其中 $Z = \{\pm I\}$), 试计算诱导特征标 $(1_T)\uparrow G$, 并且证明

$$(1_T)\uparrow G = 1_G + \chi,$$

其中 χ 是 G 的一个不可约特征标.

(b) 假设 λ 是群 T 的一个非平凡线性特征标. 计算 $\lambda\uparrow G$ 并证明它是群 G 的一个不可约特征标.

(c) 通过考虑 χ_S(见命题 19.14) 得到群 G 的一个次数为 6 的不可约特征标.

(d) 根据前面的 (a), (b), (c) 我们得到了群 G 的次数为 $1, 7, 8, 6$ 的不可约特征标. 运用正交关系完成特征标表.

5. $SL(2,7)$的特征标表.

假设 $G = SL(2,7)$.

(a) 证明 G 的 11 个共轭类及其代表元 g_i 如下表:

g_i	g_i的阶数	$\lvert C_G(g_i)\rvert$	$\lvert g_i^G\rvert$
$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	336	1
$g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	2	336	1
$g_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	4	8	42

续表

g_i	g_i的阶数	$\|C_G(g_i)\|$	$\|g_i^G\|$
$g_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	8	8	42
$g_5 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$	8	8	42
$g_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	3	6	56
$g_7 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	6	6	56
$g_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	7	14	24
$g_9 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	14	14	24
$g_{10} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	7	14	24
$g_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	14	14	24

(b) 运用 $PSL(2,7)$ 的特征标表写出群 G 的六个核包含 $Z = \{\pm I\}$ 的不可约特征标.

(c) 假设 $\chi_7, \chi_8, \chi_9, \chi_{10}, \chi_{11}$ 是群 G 余下的五个不可约特征标. 证明对于所有的 $j(7 \leqslant j \leqslant 11), g \in G$ 有 $\chi_j(g) = -\chi_j(-g)$.

(d) 证明当 $7 \leqslant j \leqslant 11$ 时,$\chi_j(g_3) = 0$, 并由此得到 $\chi_j(1)$ 为偶数.

(e) 通过考虑特征标表中 g_6 代表的列, 并根据模 3 同余, 证明 $\chi_7, \ldots, \chi_{11}$ 的次数分别为 $4, 4, 6, 6, 8$, 并确定 $\chi_j(g_6)$ $(7 \leqslant j \leqslant 11)$ 的值.

(f) 假设 ψ 为 G 的次数为 4 的不可约特征标. 通过考虑 ψ_A 在 g_1, g_2, g_3, g_6 上的值 (见命题 19.14), 证明 ψ_A 是群 G 的一个次数为 6 且核包含 Z 的不可约特征标. 确定次数为 4 的不可约特征标在所有的 g_i 上的值.

(g) 完成群 G 的特征标表.

6. $PSL(2,11)$的特征标表. 设 $G = PSL(2,11)$. 则 G 共有八个共轭类, 它的共轭类代表元 $g_1, \ldots, g_8$, 代表元阶数以及中心化子的阶数如下表:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_i的阶数	1	2	3	6	5	5	11	11
$\|C_G(g_i)\|$	660	12	6	6	5	5	11	11

同时 $g_5^{-1}, g_6^{-1}, g_7^{-1}, g_8^{-1}$ 分别与 g_5, g_6, g_8, g_7 共轭.
试根据以上信息确定群 G 的特征标表.

第 28 章　$GL(2,q)$ 的特征标表

现在我们将要计算一个重要的无限系列的群的特征标表, 其中的一个习题将会告诉你, 怎么用这一章的结论来确定无限多单群的特征标表. 在最后一章和它的习题中, 我们将会给出一些 2×2 矩阵群的特征标表, 其中矩阵元素在 $\mathbb{Z}_7$ 和 $\mathbb{Z}_{11}$ 中. 我们将要计算元素取自任意有限域的某些矩阵群的特征标表. 乍看之下, 这似乎是一项艰巨的工作, 因为不可约特征标的个数是随着所选域的大小的增加而增加的. 然而我们将会看到这类群的共轭类能分成 4 组, 不可约特征标也是一样的. 因此其特征标的取值能排列在一个 4×4 的矩阵中.

域 $\mathbb{F}_q$ 和 $\mathbb{F}_{q^2}$

我们考虑到有限域, 并将讲我们会用到的域的性质; 如果读者对有限域不熟悉, 可以参看所列参考文献中 J.B.Fraleigh[2] 所写的书.

域 $(F,+,\times)$ 为集合 F 上有两个二元运算 $+$ 和 $\times$, 使得下列性质成立. 首先, $(F,+)$ 是以 0 为单位元的一个交换群. 第二, 若记 $F^*=F\setminus\{0\}$, 那么 $(F^*,\times)$ 是以 1 为单位元的交换群. 最后, 分配律成立; 也就是对任意的 $a,b,c\in F$ 有 $(a+b)c=ac+bc$. 例如, $\mathbb{R},\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{Z}_p$ (p 为素数) 在普通加法和乘法运算下为域.

我们将会用到的有限域的基本性质如下, 此处只叙述结论, 并不给出其证明.

(28.1)　令 p 为一个素数, n 为正整数, 且记 $q=p^n$. 那么存在一个 q 阶域 $\mathbb{F}_q$, 且每个 q 阶域都同构于 $\mathbb{F}_q$.

对任意的 $s\in\mathbb{F}_q$, p 个 s 求和等于 0, 简而言之, 就是 $ps=0$.

群 $(\mathbb{F}_q^*,\times)$ 是循环群.

注意到对 $1\leqslant i\leqslant p-1$, 二项式系数 C_p^i 可以被 p 整除; 所以对任意的 $s,t\in\mathbb{F}_q$ 有 $(s+t)^p=s^p+t^p$, 因此对任意的正整数 k 有 $(s+t)^{p^k}=s^{p^k}+t^{p^k}$. 在下一个命题的证明中将会用到这个结论.

28.2　命题

令 $F=\mathbb{F}_{q^2}$ 且 $S=\{s\in F: s^q=s\}$.

(1) 集合 S 是 F 的 q 阶子域, 因此 $S\cong\mathbb{F}_q$.

(2) 若 $r\in F$, 那么 $r+r^q, r^{1+q}\in S$.

证明 (1) 假设 $s, t \in S$. 那么 $(s+t)^q = s^q + t^q = s + t$, 所以 $s + t \in S$. 很容易验证 $(S, +)$ 和 $(S \setminus \{0\}, \times)$ 是交换群, 所以 S 是一个域.

(2) 因为 $\mathbb{F}_{q^2}^*$ 是 $q^2 - 1$ 阶群, 因此对任意的 $r \in F$, 有 $r^{q^2} = r$. 这意味着 $(r + r^q)^q = r^q + r^{q^2} = r + r^q$, 且 $(r^{1+q})^q = r^{1+q}$, 所以 $r + r^q, r^{1+q} \in S$. 证毕.

在后面我们将会把命题 28.2 中 $\mathbb{F}_{q^2}$ 的子域 S 等同于域 $\mathbb{F}_q$.

现在, 我们引入下面的记号.

(28.3) 令 ε 为循环群 $\mathbb{F}_{q^2}^*$ 的生成元, 并令 $\omega = e^{(2\pi i/(q^2-1))}$. 假设 $r \in \mathbb{F}_{q^2}^*$. 对某个 m, 记 $r = \varepsilon^m$ 且令 $\bar{r} = \omega^m$.

那么 $r \mapsto \bar{r}$ 是 $\mathbb{F}_{q^2}^*$ 的一个不可约特征标. 此外, $\mathbb{F}_{q^2}^*$ 的每个不可约特征标对某个整数 j 都可以写成 $r \mapsto \bar{r}^j$ 的形式, 其中 j 为某些整数.

现在我们将要给出本章的主要结论, 也就是定理 28.5.

$GL(2, q)$ 的共轭类

一般线性群 $GL(2, q)$是元素在 $\mathbb{F}_q$ 中的 2×2 阶的可逆矩阵组成的群. 它的所有行列式为 1 的矩阵组成的子群是特殊线性群 $SL(2, q)$, 在最后一章我们将会讨论一些特殊线性群. 这里要计算 $GL(2, q)$ 的特征标表.

令 $G = GL(2, q)$, 矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

属于 G 当且仅当它的行向量是线性无关的. 为了确定这样的矩阵的数量, 首先记 (a, b) 是任意的非零行向量, 一共有 $q^2 - 1$ 种选择; 一旦 (a, b) 选定, 那 (c, d) 只能是除 (a, b) 的倍数之外的任意的行向量, 一共有 $q^2 - q$ 种选择. 所以 $|G| = (q^2 - 1)(q^2 - q) = q(q-1)^2(q+1)$.

G 的共轭类可以分为 4 组, 其中有三组是比较容易说明的.

首先,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$$

共轭, 只有当 $\{a, c\} = \{a', c'\}$ 时, 因为共轭矩阵有相同的特征值. 在下面的讨论中我们经常会用到该结论.

矩阵

$$sI = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{F}_q^*)$$

属于 G 的中心. 所以有 $q - 1$ 个大小为 1 的共轭类.

接着, 考虑矩阵

$$u_s=\begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad (s\in\mathbb{F}_q^*).$$

令

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G.$$

那么

$$gu_s=\begin{pmatrix} as & a+bs \\ cs & c+ds \end{pmatrix} \quad \text{且 } u_sg=\begin{pmatrix} as & d+bs \\ cs & ds \end{pmatrix},$$

所以 g 属于 u_s 的中心化子当且仅当 $c=0$ 且 $a=d$. 这样矩阵 $u_s(s\in\mathbb{F}_q^*)$ 给我们提供了 $q-1$ 个共轭类; 中心化子的阶为 $(q-1)q$, 因此根据定理 12.8, 每个共轭类都包含 q^2-1 个元素.

现在令

$$d_{s,t}=\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\in G \quad (s,t\in\mathbb{F}_q^*),$$

有

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} d_{s,t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=d_{t,s}.$$

另一方面, 若 $s\neq t$, 那么 $gd_{s,t}=d_{s,t}g$ 当且仅当 $b=c=0$. 这样, 矩阵 $d_{s,t}(s,t\in\mathbb{F}_q^*, s\neq t)$ 给我们提供了 $(q-1)(q-2)/2$ 个共轭类; 中心化子的阶数为 $(q-1)^2$, 所以每个共轭类包含 $q(q+1)$ 个元素.

最后, 考虑

$$v_r=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r^{1+q} & r+r^q \end{pmatrix} \quad (r\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q).$$

根据命题 28.2, $v_r\in G$. v_r 的特征多项式为

$$\det(xI-v_r)=x(x-(r+r^q))+r^{1+q}=(x-r)(x-r^q),$$

所以 v_r 的特征值为 r 和 r^q. 因为 $r\notin\mathbb{F}_q$, 可以看出 v_r 不在我们目前构造的任何一个共轭类中.

现在,

$$gv_r=\begin{pmatrix} -br^{1+q} & a+b(r+r^q) \\ -dr^{1+q} & c+d(r+r^q) \end{pmatrix}$$

$$\text{且 } v_rg=\begin{pmatrix} c & d \\ -ar^{1+q}+c(r+r^q) & -br^{1+q}+d(r+r^q) \end{pmatrix}.$$

因此 $gv_r = v_r g$ 仅当 $c = -br^{1+q}$ 且 $d = a + b(r + r^q)$ 时. 若这些条件成立, 那么

$$ad - bc = a^2 + ab(r + r^q) + b^2 r^{1+q} = (a + br)(a + br^q).$$

因为 $(a,b) \neq (0,0)$ 且 $r, r^q \notin \mathbb{F}_q$, 可以看出 $a + br$ 和 $a + br^q$ 是非零的. 所以, $g \in C_G(v_r)$ 当且仅当

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -br^{1+q} & a + b(r + r^q) \end{pmatrix}.$$

这样, $|C_G(v_r)| = q^2 - 1$, 且包含 v_r 的共轭类大小为 $q^2 - q$.

矩阵 v_t 的特征值为 t 和 t^q, 所以它与 v_r 不共轭除非 $t = r$ 或 $t = r^q$. 将 $\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ 划分为这样的子集 $\{r, r^q\}$; 每个子集都包含一个共轭类的代表元 v_r, 且根据不同的子集, 可以得到不同共轭类的代表元.

现在我们找到了 G 的所有共轭类.

28.4　命题

$GL(2,q)$ 有 $q^2 - 1$ 个共轭类, 具体如下:

代表元g	sI	u_s	$d_{s,t}$	v_r
$\|C_G(g)\|$	$(q^2-1)(q^2-q)$	$(q-1)q$	$(q-1)^2$	q^2-1
共轭类个数	$q-1$	$q-1$	$(q-1)(q-2)/2$	$(q^2-q)/2$

以 sI 和 u_s 为代表元的共轭类族中的 s 取遍 $\mathbb{F}_q^*$ 中的所有元素.

以 $d_{s,t}$ 为代表元的共轭类族取遍 $\mathbb{F}_q^*$ 中所有的不同元素组成的无序对 $\{s,t\}$.

以 v_r 为代表元的共轭类族取遍 $\mathbb{F}_{q^2}^* \setminus \mathbb{F}_q^*$ 中的所有不同元素组成的无序对 $\{r, r^q\}$.

证明　我们已经找到的共轭类共包含

$$(q-1) + (q-1)(q^2-1) + (q-1)(q-2)q(q+1)/2 + (q^2-q)(q^2-q)/2$$

个元素. 而它等于 $GL(2,q)$ 的阶, 所以我们已然找到了所有的共轭类. 证毕.

$GL(2,q)$ 的特征标

现在我们来确定 G 的特征标表.

28.5 定理

$GL(2,q)$ 的共轭类见命题 28.4, 令 $r \mapsto \overline{r}$ 为同 (28.3) 中给出的从 $\mathbb{F}_{q^2}^*$ 到 $\mathbb{C}$ 的函数. 那么 $GL(2,q)$ 的不可约特征标为如下给定的 $\lambda_i, \psi_i, \psi_{i,j}, \chi_i$.

	sI	u_s	$d_{s,t}$	v_r
λ_i	$\overline{s}^{2i}$	$\overline{s}^{2i}$	$(\overline{st})^i$	$\overline{r}^{i(1+q)}$
ψ_i	$q\overline{s}^{2i}$	0	$(\overline{st})^i$	$-\overline{r}^{i(1+q)}$
$\psi_{i,j}$	$(q+1)\overline{s}^{i+j}$	$\overline{s}^{i+j}$	$\overline{s}^i\overline{t}^j+\overline{s}^j\overline{t}^i$	0
χ_i	$(q-1)\overline{s}^i$	$-\overline{s}^i$	0	$-(\overline{r}^i+\overline{r}^{iq})$

这里的不可约特征标满足有如下条件:

(a) 对 λ_i 有 $0 \leqslant i \leqslant q-2$. 这样有 $q-1$ 个特征标 λ_i, 每个特征标次数为 1.

(b) 对 ψ_i 有 $0 \leqslant i \leqslant q-2$. 这样有 $q-1$ 个特征标 ψ_i, 每个特征标次数为 q.

(c) 对 $\psi_{i,j}$ 有 $0 \leqslant i < j \leqslant q-2$. 这样有 $(q-1)(q-2)/2$ 个特征标 $\psi_{i,j}$, 每个特征标次数为 $q+1$.

(d) 对 χ_i 首先考虑 $0 \leqslant j \leqslant q^2-1$ 且 $(q+1) \nmid j$ 的 j 的集合. 若 j_1 和 j_2 属于这个集合且 $j_1 \equiv j_2 q \bmod (q^2-1)$, 那么 j_1 和 j_2 中恰有一个属于特征标 χ_i 的指标集. 因此有 $(q^2-q)/2$ 个特征标 χ_i 每个特征标次数为 $q-1$.

在着手计算 G 的不可约特征标之前, 先给出一个命题, 这命题在后面会很有用. 假定 ε 是之前我们选定的 $\mathbb{F}_{q^2}^*$ 的生成元, 且

$$v_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^{1+q} & \varepsilon+\varepsilon^q \end{pmatrix}.$$

28.6 命题

令 $K = \langle v_\varepsilon \rangle$. 那么 $|K| = q^2-1$. 群 K 中有 G 中的 $q-1$ 个数量矩阵 sI, 对 $r \in \mathbb{F}_{q^2}^* \setminus \mathbb{F}_q^*$,$K$ 中剩下的 q^2-q 个元素中恰有两个元素属于 v_r 的共轭类.

证明　v_ε 的特征值为 ε 和 ε^q, 所以 v_ε 为 q^2-1 阶.

v_ε^i 和 v_ε^{iq} 的特征值是 ε^i 和 ε^{iq}. 若 $\varepsilon^i \neq \varepsilon^{iq}$ 那么 $\varepsilon^i \notin \mathbb{F}_q$, 且 v_ε^i 和 v_ε^{iq} 必与 v_{ε^i} 共轭. 因此 K 中的两个元素属于 v_{ε^i} 的共轭类.

若 $\varepsilon^i = \varepsilon^{iq}$ 那么 $v_\varepsilon^i = \varepsilon^i I$, 因为 v_ε^i 在 $\mathbb{F}_q$ 的中有特征值, 且 v_ε^i 是可以对角化的, 所以有 $q-1$ 个这样的数量矩阵. 证毕.

反过来我们要构建定理 28.5 中的不可约特征标 $\lambda_i, \psi_i, \psi_{i,j}$ 和 χ_i.

28.7 命题

群 G 中有 $q-1$ 个线性特征标 λ_i, 且它们在定理 28.5 中已给出.

证明 映射 $\det: g \to \det g$ 是从 G 到 $\mathbb{F}_q^*$ 上的同态. 当 i 从 0 变化到 $q-2$ 时, 函数

$$\lambda_i : g \to (\overline{\det g})^i \quad (g \in G)$$

给出了群 G 的 $q-1$ 个不同的线性特征标, 其值为定理 28.5 中给出的. 证毕.

在后面将会看到命题 28.7 中的线性特征标 $\lambda_i (0 \leqslant i \leqslant q-2)$ 是 G 的所有线性特征标.

28.8 命题

对任意的整数 i, j 存在 G 的特征标 $\psi_{i,j}$, 它们在共轭类代表元上的值, 同命题 28.4 中一样, 如下表所示.

	sI	u_s	$d_{s,t}$	v_r
$\psi_{i,j}$	$(q+1)\overline{s}^{i+j}$	$\overline{s}^{i+j}$	$\overline{s}^i\overline{t}^j + \overline{s}^j\overline{t}^i$	0

证明 令 $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \right\}$. 那么 B 是 G 的一个子群, $|B| = (q-1)^2 q$. 定义 $\lambda_{i,j} : B \to \mathbb{C}$ 为

$$\lambda_{i,j} : \begin{pmatrix} s & r \\ 0 & t \end{pmatrix} \mapsto \overline{s}^i \overline{t}^j.$$

那么 $\lambda_{i,j}$ 是 B 的一个特征标. 令 $\psi_{i.j} = \lambda_{i,j} \uparrow G$.

对每个共轭类代表元 g, 用命题 21.23 计算 $\psi_{i,j}(g)$, 如下.

$$\begin{aligned}
&g = sI: \quad \psi_{i,j}(g) = \frac{|C_G(g)|}{|C_B(g)|}\lambda_{i,j}(g), \\
&g = u_s: \quad \psi_{i,j}(g) = \frac{|C_G(g)|}{|C_B(g)|}\lambda_{i,j}(g), \\
&g = d_{s,t}: \quad \psi_{i,j}(g) = |C_G(g)| \left(\frac{\lambda_{i,j}(g)}{|C_B(g)|} + \frac{\lambda_{i,j}(g')}{|C_B(g')|} \right), \quad \text{其中} g' = d_{t,s}, \\
&g = v_r: \quad \psi_{i,j}(g) = 0.
\end{aligned}$$

因此, $\psi_{i,j}$ 的值同命题中所述一样. 证毕.

28.9　命题

对任意的整数 i, 存在 G 的一个不可约特征标 ψ_i, 其取值同定理 28.5 中给出的一样. 特征标 $\psi_i(0 \leqslant i \leqslant q-2)$ 是互不相同的.

证明　我们将证明命题 28.8 中的特征标 $\psi_{i,i}$ 满足 $\psi_{i,i} = \lambda_i + \psi_i$. 因此, 计算 $\langle \psi_{i,i}, \psi_{i,i} \rangle$ 和 $\langle \psi_{i,i}, \lambda_i \rangle$. 因为 $\overline{s}^i$ 的复共轭为 $\overline{s}^{-i}$, 从而

$$\begin{aligned}\langle \psi_{i,i}, \psi_{i,i} \rangle &= \frac{(q+1)^2}{(q^2-1)(q^2-q)}(q-1) + \frac{1}{(q-1)q}(q-1) \\ &\quad + \frac{4}{(q-1)^2}\frac{(q-1)(q-2)}{2} \\ &= 2.\end{aligned}$$

这里, 第一项对应元素 sI 的共轭类, 且第一项的计算包含下面三个结果.

(1) $\psi_{i,i}(sI)\overline{\psi_{i,i}(sI)} = (q+1)^2$.

(2) $|C_G(sI)| = (q^2-1)(q^2-q)$.

(3) 代表元为 sI 的共轭类有 $q-1$ 个.

$\langle \psi_{i,i}, \psi_{i,i} \rangle$ 中的其余项可以用相似的方法计算.

接下来,

$$\begin{aligned}\langle \psi_{i,i}, \lambda_i \rangle &= \frac{(q+1)}{(q^2-1)(q^2-q)}(q-1) + \frac{1}{(q-1)q}(q-1) \\ &\quad + \frac{2}{(q-1)^2}\frac{(q-1)(q-2)}{2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

而 $\langle \psi_{i,i}, \lambda_i \rangle = 1$ 且 $\langle \psi_{i,i}, \psi_{i,i} \rangle = 2$, 这意味着存在某个不可约特征标 ψ_i 使得 $\psi_{i,i} = \lambda_i + \psi_i$. 从 $\psi_{i,i}$ 中提取出 λ_i 以便得到像定理 28.5 中给定的一样 ψ_i 的取值.

令 s 为 $\mathbb{F}_q^*$ 中的一个 $q-1$ 阶元素. 那么 $\psi_i : d_{s,1} \to \overline{s}^i$. 因此特征标 $\psi_i(0 \leqslant i \leqslant q-2)$ 互不相同. 证毕.

28.10　命题

假设 $0 \leqslant i < j \leqslant q-2$. 那么命题 28.8 中的特征标 $\psi_{i,j}$ 是不可约的.

证明　我们将要证明 $\langle \psi_{i,j}, \psi_{i,j} \rangle = 1$. 根据命题 28.8 中给定的 $\psi_{i,j}$ 的值, 可以得到 $\langle \psi_{i,j}, \psi_{i,j} \rangle = A + B + C$, 其中

$$A = \frac{(q+1)^2}{(q^2-1)(q^2-q)}(q-1),$$

$$B = \frac{1}{(q-1)q}(q-1),$$
$$C = \frac{1}{(q-1)^2}\frac{1}{2}\sum_{s\neq t}(\overline{s}^i\overline{t}^j + \overline{s}^j\overline{t}^i)(\overline{s}^{-i}\overline{t}^{-j} + \overline{s}^{-j}\overline{t}^{-i}).$$

C 中的系数为 $\frac{1}{2}$ 是因为对每一个 $\mathbb{F}_q^*$ 中不同元素所组成的无序对 $\{s,t\}$ 都只有一个共轭类.

为了计算 C, 注意到 $\{d_{s,t} : s,t \in \mathbb{F}_q^*\}$ 为 $(q-1)^2$ 阶交换群, 如果 $\sigma : d_{s,t} \mapsto \overline{s}^i\overline{t}^j + \overline{s}^j\overline{t}^i$ 那么 σ 为这个群的两个不相等的不可约特征标之和. 所以 $\langle\sigma,\sigma\rangle = 2$. 也就是

$$\frac{1}{(q-1)^2}\left(4(q-1) + \sum_{s\neq t}(\overline{s}^i\overline{t}^j + \overline{s}^j\overline{t}^i)(\overline{s}^{-i}\overline{t}^{-j} + \overline{s}^{-j}\overline{t}^{-i})\right) = 2.$$

因此

$$C = \frac{q-3}{q-1}.$$

现在我们已经知道 $A + B + C = 1$. 所以 $\langle\psi_{i,j},\psi_{i,j}\rangle = 1$, 所以 $\psi_{i,j}$ 是不可约的. 证毕.

28.11　推论

特征标 $\psi_{i,j} (0 \leqslant i < j \leqslant q-2)$ 是 G 的互不相同的不可约特征标.

证明　假设 $0 \leqslant i < j \leqslant q-2$, $0 \leqslant i' < j' \leqslant q-2$, 且 $(i,j) \neq (i',j')$. 我们须证 $\psi_{i,j} \neq \psi_{i',j'}$.

考虑群 B 和它的线性特征标 $\lambda_{i,j}$, 其中 $\lambda_{i,j}$ 为我们曾在命题 28.8 的证明中用到的. 有

$$\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i} : \begin{pmatrix} s & b \\ 0 & t \end{pmatrix} \mapsto \overline{s}^i\overline{t}^j + \overline{s}^j\overline{t}^i.$$

因为 $\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i} \neq \lambda_{i',j'} + \lambda_{j',i'}$, 从而存在 $(q-1)$ 次复单位根 $\overline{s}$ 和 $\overline{t}$ 使得

$$\overline{s} \neq \overline{t} \quad 且 \quad \overline{s}^i\overline{t}^j + \overline{s}^j\overline{t}^i \neq \overline{s}^{i'}\overline{t}^{j'} + \overline{s}^{j'}\overline{t}^{i'},$$
$$或者\ \overline{s} = \overline{t}\ 且\ \overline{s}^{i+j} \neq \overline{s}^{i'+j'}.$$

对于上面的任一种情形, 我们知道在 G 的共轭类上 $\psi_{i,j}$ 与 $\psi_{i',j'}$ 不同. 所以 $\psi_{i,j} \neq \psi_{i',j'}$. 证毕.

28.12　命题

对每个整数 i, 存在 G 的一个特征标 ϕ_i, 取值如下.

	sI	u_s	$d_{s,t}$	v_r
ϕ_i	$q(q-1)\overline{s}^i$	0	0	$\overline{r}^i+\overline{r}^{iq}$

证明　和命题 28.6 一样, 令 $K=\langle v_\varepsilon\rangle$, 考虑 K 中将 K 的生成元 v_ε 映到 $\overline{\varepsilon}^i$ 的线性特征标 α_i. 假设 $g\in K$ 且 g 在 G 中与 v_r 共轭. 那么 g 的特征值为 r 和 r^q. 因此 $\alpha_i(g)=\overline{r}^i$ 或 $\overline{r}^{iq}$, 且

$$\alpha_i(g)+\alpha_i(g^q)=\overline{r}^i+\overline{r}^{iq}.$$

令 $\phi_i=\alpha_i\uparrow G$.

为了计算 ϕ_i, 首先来看 $\alpha_i\uparrow G$, $\alpha_i\uparrow G$ 在与 K 中元素不共轭的所有元素上取值均为零. 这样, 根据命题 28.6, ϕ_i 在形如 u_s 和 $d_{s,t}(s\neq t)$ 的元素上取值为 0.

如果 $g=sI, s\in\mathbb{F}_q^*$, 那么 $g\in K$ 且

$$\phi_i(g)=\frac{|C_G(g)|}{|C_K(g)|}\alpha_i(g)=q(q-1)\overline{s}^i.$$

假设 $r\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q$. 那么, 根据命题 28.6, v_r 与 K 中的一个元素 g 共轭. 同时

$$\begin{aligned}\phi_i(g)&=|C_G(g)|\left(\frac{\alpha_i(g)}{|C_K(g)|}+\frac{\alpha_i(g^q)}{|C_K(g)|}\right)\\&=\alpha_i(g)+\alpha_i(g^q)=\overline{r}^i+\overline{r}^{iq}.\end{aligned}$$

这样 ϕ_i 取值同命题中一样. 证毕.

为了计算涉及特征标 ϕ_i 的一些内积, 需要用到下面的引理.

28.13　引理

假设 i 为一个整数, 且 $(q+1)\nmid i$. 那么

$$\sum_{r\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q}(\overline{r}^i+\overline{r}^{iq})(\overline{r}^{-i}+\overline{r}^{-iq})=2(q-1)^2.$$

证明

$$G_1=\left\{\begin{pmatrix}r&0\\0&r^q\end{pmatrix}:r\in\mathbb{F}_{q^2}^*\right\}\text{ 和 }G_2=\left\{\begin{pmatrix}r&0\\0&r^q\end{pmatrix}:r\in\mathbb{F}_q^*\right\}^{①}$$

分别为 q^2-1 和 $q-1$ 阶交换群. 现在

$$\begin{pmatrix}r&0\\0&r^q\end{pmatrix}\mapsto\overline{r}^i+\overline{r}^{iq}$$

① 原书为“$G_2=\left\{\begin{pmatrix}r&0\\0&r_q\end{pmatrix}:r\in\mathbb{F}_q^*\right\}$”, 译者修正为“$G_2=\left\{\begin{pmatrix}r&0\\0&r^q\end{pmatrix}:r\in\mathbb{F}_q^*\right\}$”.

对每个群都给出了一个次数为 2 的特征标 χ. 对 G_1, 特征标 χ 是两个不相等的不可约特征标之和, 因为 $(q+1)\nmid i$ 这意味着 $\overline{\varepsilon}^i \neq \overline{\varepsilon}^{iq}$; 对 G_2, χ 是某个不可约特征标的两倍, 因为对 $r \in \mathbb{F}_{q^2}^*$ 有 $r^q = r$. 取 G_1 的特征标 χ 与自身的内积, 有

$$\frac{1}{q^2-1}\sum_{r\in\mathbb{F}_{q^2}^*}(\overline{r}^i+\overline{r}^{iq})(\overline{r}^{-i}+\overline{r}^{-iq})=2,$$

对 G_2 的特征标 χ 做同样的运算, 有

$$\frac{1}{q-1}\sum_{r\in\mathbb{F}_q^*}(\overline{r}^i+\overline{r}^{iq})(\overline{r}^{-i}+\overline{r}^{-iq})=4.$$

因此, $\displaystyle\sum_{r\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q}(\overline{r}^i+\overline{r}^{iq})(\overline{r}^{-i}+\overline{r}^{-iq})=2(q^2-1)-4(q-1)=2(q-1)^2$. 证毕.

28.14 命题

对每个整数 i, 令 χ_i 为 G 上取值如下表所示的类函数.

	sI	u_s	$d_{s,t}$	v_r
χ_i	$(q-1)\overline{s}^i$	$-\overline{s}^i$	0	$-(\overline{r}^i+\overline{r}^{iq})$

若 $(q+1)\nmid i$, 那么 χ_i 是 G 的一个不可约特征标.

证明 我们通过说明得出的结果的正确性来说明我们所做操作的正确性.

命题 28.8, 28.9 和 28.12 中给出了特征标 $\psi_{i,j}, \psi_i$ 和 ϕ_i. 现在, χ_i 为 G 上的类函数,

$$\chi_i=\psi_{0,-i}\psi_i-\psi_{0,i}-\phi_i.$$

下面这个表可以来验证这一点.

	sI	u_s	$d_{s,t}$	v_r
$\psi_{0,-i}$	$(q+1)\overline{s}^{-i}$	$\overline{s}^{-i}$	$\overline{s}^{-i}+\overline{t}^{-i}$	0
ψ_i	$q\overline{s}^{2i}$	0	$\overline{(st)}^i$	$-\overline{r}^{i(1+q)}$
$\psi_{0,-i}\psi_i$	$q(q+1)\overline{s}^i$	0	$\overline{s}^i+\overline{t}^i$	0
$\psi_{0,i}$	$(q+1)\overline{s}^i$	$\overline{s}^i$	$\overline{s}^i+\overline{t}^i$	0
ϕ_i	$q(q-1)\overline{s}^i$	0	0	$\overline{r}^i+\overline{r}^{iq}$
χ_i	$(q-1)\overline{s}^i$	$-\overline{s}^{-i}$	0	$-(\overline{r}^i+\overline{r}^{iq})$

接下来, 假设 $(q+1)\nmid i$. 利用引理 28.13 计算出 $\langle\chi_i,\chi_i\rangle$.

$$\langle\chi_i,\chi_i\rangle=\frac{(q-1)^2}{(q^2-1)(q^2-q)}(q-1)+\frac{1}{q^2-q}(q-1)+\frac{(q-1)^2}{q^2-1}=1.$$

因为 χ_i 为 G 的不可约特征标整系数的线性组合, 且 $\langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1$, $\chi_i(1) > 0$, 所以 χ_i 是 G 的一个不可约特征标. 证毕.

28.15　命题

假设 i, j 为 $(q+1) \nmid i$, $(q+1) \nmid j$ 的整数, 且 $j \not\equiv i, iq \bmod (q^2-1)$. 那么 G 的特征标 χ_i 和 χ_j 是不相等的.

证明　同命题 28.6 中一样, 令 $K = \langle v_\varepsilon \rangle$, 考虑 K 的将 K 的生成元 v_ε 映到 $\overline{\varepsilon}^i$ 的线性特征标 α_i. 假设 $g \in K$.

如果 $g = sI$, 其中 $s \in \mathbb{F}_q^*$, 那么 $(\alpha_i + \alpha_{iq})(g) = 2\overline{s}^i$.

如果 g 与 v_r 共轭, 其中 $r \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$, 那么 $(\alpha_i + \alpha_{iq})(g) = \overline{r}^i + \overline{r}^{iq}$.

因为 $j \not\equiv i, iq \bmod (q^2-1)$,$K$ 的特征标 $\alpha_i + \alpha_{iq}$ 和 $\alpha_j + \alpha_{jq}$ 不相等, 所以存在某个 $s \in \mathbb{F}_q^*$, 使得 $\overline{s}^i \neq \overline{s}^j$, 或者存在某个 $r \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ 有 $\overline{r}^i + \overline{r}^{iq} \neq \overline{r}^j + \overline{r}^{jq}$. 所以, $\chi_i \neq \chi_j$. 证毕.

我们现在已经完成了定理 28.5 的证明, 因为我们说明了定理中给出的类函数是不相同的不可约特征标; 且它们数量为 q^2-1, 与 G 的共轭类的数量相等.

可以利用 $GL(2,q)$ 的特征标表来确定 $SL(2,q)$ 的特征标表, 因为大多数不可约特征标限制后仍为不可约特征标. 但我们并不能通过限制得到所有的不可约特征标, 因为答案相当复杂, 且它们与 q 是否是 2 的幂次或者 $q \equiv 1 \bmod 4$ 或者 $q \equiv 3 \bmod 4$ 有关. 在习题 28.2 中, 读者可以研究最简单的情况, 也就是 q 为 2 的幂次. 因为当 q 为 2 的幂次时, $SL(2,q) \cong PSL(2,q)$, 这就给出了一系列单群 $PSL(2,q)$ 的特征标表.

根据 $SL(2,q)$ 的特征标表中那些核包含 $SL(2,q)$ 的中心的特征标可以求出群 $PSL(2,q)$ 的特征标 —— 对照第 27 章 —— 所以 $PSL(2,q)$ 的特征标表比 $SL(2,q)$ 的特征标表容易求出来. 一个有挑战性的习题是当 $q \equiv 1 \bmod 4$ 或者 $q \equiv 3 \bmod 4$ 时由 $GL(2,q)$ 来求 $PSL(2,q)$ 的特征标表.

尽管 $GL(2,q)$ 的特征标表在 1907 年首次给出, 但直到 1950 年 $GL(3,q)$ 的特征标表才找出来. 1955 年, J. A. Green 计算出了对任意的正整数 n, $GL(n,q)$ 的特征标表.

第 28 章总结

$GL(2,q)$ 的特征标表有如下性质.

(a) 有 $q-1$ 个共轭类代表元形式为 $sI = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, 且有 $q-1$ 个次数为 1 的不可约特征标.

(b) 有 $q-1$ 个共轭类代表元形式为 $u_s = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, 且有 $q-1$ 个次数为 q 的不可约特征标.

(c) 有 $(q-1)(q-2)/2$ 个代表元形式为 $d_{s,t} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ $(s \neq t)$ 的共轭类, 并且有 $(q-1)(q-2)/2$ 个次数为 $q+1$ 的不可约特征标.

(d) 有 $(q^2-q)/2$ 个代表元形式为 $v_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r^{1+q} & r+r^q \end{pmatrix}$ 的共轭类, 并且有 $(q^2-q)/2$ 个次数为 $q-1$ 的不可约特征标.

第 28 章习题

1. 利用定理 28.5 写出 $GL(2,3)$ 的特征标表.

2. 假设 q 是 2 的幂次. 令 $Z = \{sI : s \in \mathbb{F}_q^*\}$. 证明

$$GL(2,q) \cong Z \times SL(2,q).$$

从 $GL(2,q)$ 的特征标表推出 $SL(2,q)$的特征标表. 证明当 $q \neq 2$ 时, $SL(2,q)$ 是单群.

3. 利用对习题 28.2 的解法写出 $PSL(2,8)$ 的特征标表.

第 29 章　置换和特征标

我们已经在第 13 章中看到如果 G 是一个置换群, 也就是说存在某个 n 使得 G 是 S_n 的一个子群, 那么对于 $g \in G$ 来说, G 有一个置换特征标 $\pi : g \to |\mathrm{fix}(g)|$. 这个结果在后面计算特征标表时起到了重要的作用. 我们将在这一章中进一步学习置换群和特征标的理论, 并得到一些有用的结果, 特别是关于对称群的不可约特征标 (参见下面的定理 29.12).

群　作　用

我们引入一个更一般的概念, 而不是单单是关于对称群的. 如果 Ω 是一个集合, 用 $\mathrm{Sym}(\Omega)$ 来表示 Ω 的所有的置换组成的群. 特别地, 如果 $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$, 那么 $\mathrm{Sym}(\Omega) = S_n$.

我们给出如下定义: 令 G 是一个群, Ω 是一个集合. 那么 Ω 上的 G 的一个作用是指同态: $\phi : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$. 我们也说 G 作用在 Ω 上 (通过 ϕ).

29.1　例子

(1) 如果 $G \leqslant S_n$, 那么恒等映射就是 G 在 $\{1, 2, ..., n\}$ 上的一个作用.

(2) 令 $G = S_n$, Ω 是包含 $\{1, 2, ..., n\}$ 中的元素组成的所有的对 $\{i, j\}$ 的集合. 对于所有的 $g \in S_n, 1 \leqslant i < j \leqslant n$, 如下定义 $\phi : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$

$$\{i, j\}(g\phi) = \{ig, jg\}$$

(例如 $(12)\phi$ 把 $\{1, 3\}$ 映到了 $\{2, 3\}$). 可以验证 ϕ 是 S_n 的一个作用, 它叫做 S_n 在元素对上的作用.

(3) 令 $G = GL(2, q)$, 为有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的可逆的 2×2 阶矩阵组成的群, 就像在第 28 章定义的一样. 令 V 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 2 维的向量空间, 它包含所有的行向量 (a, b), 其中 $a, b \in \mathbb{F}_q$, 令 Ω 是 V 的所有的 1 维子空间 $\langle v \rangle$ 组成的集合. 对于所有的 $g \in G, \langle v \rangle \in \Omega$, 如下定义 $\phi : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$

$$\langle v \rangle (g\phi) = \langle vg \rangle$$

例如, 如果

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

那么 $g\phi$ 把 $\langle(a,b)\rangle$ 映到了 $\langle(a,a+b)\rangle$. 那么 ϕ 是 G 在 Ω 上的一个作用.

(4) 假设 G 存在一个指数为 n 的子群 H, 令 Ω 是 H 在 G 中所有的右陪集 Hx 组成的集合 (所以 $|\Omega|=n$). 对于所有的 $x,g\in G$, 如下定义 $\phi: G\to \mathrm{Sym}(\Omega)$

$$(Hx)(g\phi)=Hxg.$$

那么由第 23 章的习题 9 我们知道 ϕ 是 G 的一个作用, 并且有

$$\mathrm{Ker}\phi=\bigcap_{x\in G}x^{-1}Hx\leqslant H.$$

为了简化, 如果 $\phi: G\to\mathrm{Sym}(\Omega)$ 是一个作用, 那么对于所有的 $\omega\in\Omega, g\in G$, 把 $\omega(g\phi)$ 记作 ωg. 在这个记号下, 有 ϕ 是一个同态意味着对于所有的 $\omega\in\Omega, g,h\in G, \omega(gh)=(\omega g)h$.

使用这种记法, 如下定义 Ω 上的一个关系 $\sim$: 对于 $\alpha,\beta\in\Omega$, 有 $\alpha\sim\beta$ 当且仅当存在 $g\in G$ 使得 $\alpha g=\beta$. 很容易证明 $\sim$ 是 Ω 上的一个等价关系. 这个等价关系下的等价类叫做 G 在 Ω 上的轨道. 因此 Ω 是 G 的轨道的不交并. 用 $\mathrm{orb}(G,\Omega)$ 来表示 G 在 Ω 上的轨道的数量. G 在 Ω 上是传递的当且仅当 $\mathrm{orb}(G,\Omega)=1$. 换句话说, G 在 Ω 上是传递的当且仅当对于任意的 $\alpha,\beta\in\Omega$, 存在 $g\in G$ 使得 $\alpha g=\beta$.

29.2 例子

(1) 令 $G=C_4$, 为由 x 生成的群, 令 $\phi: G\to S_8$ 的定义是 $x\phi=(1234)(56)(78)$(所以有对于任意的 $k, x^k\phi=((1234)(56)(78))^k$). 那么 G 在 $\Omega=\{1,2,...,8\}$ 上有 3 个轨道, 分别是 $\{1,2,3,4\},\{5,6\},\{7,8\}$.

(2) 对于例 29.1(2,3,4) 来说, 群 G 在集合 Ω 上是传递的. 在例 (2) 中是明显的, 为了证明 (3) 需要证明对于任意的两个非零行向量 $v,w\in V$, 存在一个可逆的 2×2 阶矩阵 $A\in GL(2,q)$ 使得 $vA=w$. 而在例 (4) 中只需要注意到任意给定的两个陪集 $Hx,Hy\in\Omega$, 存在 $g=x^{-1}y\in G$ 使得 $(Hx)g=Hy$.

令 G 作用在集合 Ω 上. 对于 $\omega\in\Omega$, 把 G 的包含 ω 的轨道记作 ω^G, 所以 $\omega^G=\{\omega g: g\in G\}$, 如下定义:

$$G_\omega=\{g\in G:\omega g=\omega\}.$$

我们把 G_ω 叫做 ω 在 G 中的稳定化子.

29.3 命题

稳定化子 G_ω 是 G 的一个子群. 更进一步地, 轨道 ω^G 的大小等于 G_ω 在 G 中的指数, 也就是说

$$|\omega^G|=|G:G_\omega|.$$

证明　如果 $g,h\in G_\omega$, 那么 $\omega(gh)=(\omega g)h=\omega h=\omega$, 因此 $gh\in G_\omega$. 同时有 $g^{-1}\in G_\omega$, 并且 G_ω 包含单位元, 所以 G_ω 是一个子群.

现在令 Δ 是 G_ω 在 G 中的右陪集 $G_\omega x$ 组成的集合. 注意到对于所有的 $x,y\in G$,

$$G_\omega x=G_\omega y\Leftrightarrow xy^{-1}\in G_\omega\Leftrightarrow \omega xy^{-1}=\omega\Leftrightarrow \omega x=\omega y.$$

因此对于所有的 $x\in G$, 可以如下定义一个单射 $\gamma:\Delta\to\omega^G$

$$\gamma(G_\omega x)=\omega x.$$

很显然 γ 是一个满射, 因此 $|\Delta|=|\omega^G|$. 证毕.

置换特征标

令 G 是作用在一个有限集合 Ω 上的一个群. 用 $\mathbb{C}\Omega$ 来表示 $\mathbb{C}$ 上的向量空间, 其中 Ω 是一组基. 换句话说, $\mathbb{C}\Omega$ 包含了形如

$$\Sigma_{\omega\in\Omega}\lambda_\omega\omega\quad(\lambda_\omega\in\mathbb{C})$$

的元素, 其中加法和数乘都是一般定义下的. 就像在第 13 章中那样, 对于所有的 $g\in G$, 可以通过如下定义把 $\mathbb{C}\Omega$ 变成一个 $\mathbb{C}G$-模, 这个模叫做置换模:

$$(\Sigma_{\omega\in\Omega}\lambda_\omega\omega)g=\Sigma_{\omega\in\Omega}\lambda_\omega(\omega g).$$

在第 13 章中 (13.22) 我们知道如果 π 是这个置换模的一个特征标, 那么对于所有的 $g\in G$,

$$\pi(g)=|\mathrm{fix}_\Omega(g)|,$$

其中 $\mathrm{fix}_\Omega(g)=\{\omega\in\Omega:\omega g=\omega\}$. 把 π 叫做 G 在 Ω 上的置换特征标.

下面的一个结果, 虽然基本, 但是相当著名, 并且它提供了置换特征标和 G 的作用之间的一个基本的联系. 这个结论通常叫做 Burnside 引理, 但是事实上, 这个引理来源于 Cauchy 和 Frobenius.

29.4　命题

令 G 是作用在一个有限集合 Ω 上的一个群, 令 π 是置换特征标. 那么

$$\langle\pi,1_G\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}_\Omega(g)|=\mathrm{orb}(G,\Omega).$$

证明 首先注意到

$$\langle \pi, 1_G \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}_\Omega(g)|.$$

令 $\Delta_1, ..., \Delta_t$ 是 G 在 Ω 上的轨道, 并且对于每个 i, 选择 $\omega_i \in \Delta_i$, 由命题 29.3, 对于 $1 \leqslant i \leqslant t$ 有

$$|\Delta_i| = |\omega_i^G| = |G : G_{\omega_i}|.$$

因此 $|\Delta_i||G_{\omega_i}| = |G|$. 现在定义 $\Phi = \{(\omega, g) : \omega \in \Omega, g \in G, \omega g = \omega\}$. 我们用两种不同的方式来计算 $|\Phi|$. 首先, 对于每个 g, 使得 $\omega g = \omega$ 成立的 $\omega \in \Omega$ 的数量等于 $|\mathrm{fix}_\Omega(g)|$, 因此

$$|\Phi| = \sum_{g\in G}|\mathrm{fix}_\Omega(g)|.$$

其次, 对于每个 ω, 使得 $\omega g = \omega$ 成立的 $g \in G$ 的数量等于 $|G_\omega|$. 因此

$$|\Phi| = \sum_{\omega\in\Omega}|G_\omega| = \sum_{i=1}^{t}|\Delta_i||G_{\omega_i}| = \sum_{i=1}^{t}|G| = t|G|.$$

故 $\sum\limits_{g\in G}|\mathrm{fix}_\Omega(g)| = t|G|$. 证毕.

29.5 推论

G 在 Ω 上是传递的当且仅当 $\langle \pi, 1_G \rangle = 1$.

现在令 G 是一个群, 假设 G 作用在两个集合 Ω_1 和 Ω_2 上, 相应的置换特征标分别是 π_1 和 π_2. 那么对于所有的 $\omega_i \in \Omega_i, g \in G$, 可以如下定义 G 在卡氏积 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上的作用:

$$(\omega_1, \omega_2)g = (\omega_1 g, \omega_2 g).$$

很明显, 对于任意的 $g \in G$, 有 $\mathrm{fix}_{\Omega_1\times\Omega_2}(g) = \mathrm{fix}_{\Omega_1}(g) \times \mathrm{fix}_{\Omega_2}(g)$. 因此, 如果 π 是 G 在 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上的置换特征标, 那么对于任意的 $g \in G$, 有

$$\pi(g) = \pi_1(g)\pi_2(g).$$

29.6 命题

假设 G 作用在 Ω_1 和 Ω_2 上, 相应的置换特征标分别是 π_1 和 π_2. 那么 $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \mathrm{orb}(G, \Omega_1 \times \Omega_2)$.

证明 有

$$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}_{\Omega_1}(g)||\mathrm{fix}_{\Omega_2}(g)| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}_{\Omega_1\times\Omega_2}(g)|,$$

而由命题 29.4 我们知道这个是等于 $\mathrm{orb}(G, \Omega_1 \times \Omega_2)$ 的. 证毕.

在这一章的余下部分, 我们应用命题 29.6 来处理一系列的情况, 首先就是当 $\Omega_1 = \Omega_2$ 的情况.

假设 G 作用在 Ω 上. 那么就像上面定义的那样 G 作用在 $\Omega \times \Omega$ 上, 即对于所有的 $\omega_1, \omega_2 \in \Omega, g \in G$, 有 $(\omega_1, \omega_2)g = (\omega_1 g, \omega_2 g)$.

29.7　定义

G 作用在 $\Omega \times \Omega$ 上的轨道的数量叫做 G 在 Ω 上的秩, 记作 $r(G, \Omega)$. 因此

$$r(G, \Omega) = \mathrm{orb}(G, \Omega \times \Omega).$$

下面的结果可以由命题 29.6 立刻得到.

29.8　命题

令 G 作用在 Ω 上, 置换特征标是 π. 那么

$$r(G, \Omega) = \langle \pi, \pi \rangle.$$

现在假设 G 在 Ω 上是传递的, 并且有 $|\Omega| > 1$. 那么

$$\Delta = \{(\omega, \omega) : \omega \in \Omega\}$$

是 G 在 $\Omega \times \Omega$ 上的一个轨道, 因此有 $r(G, \Omega) \geqslant 2$. 那么等号成立的情况是我们最关心的情况.

29.9　定义

假设 G 在 Ω 上是传递的. 那么 G 在 Ω 上是 2- 传递的当且仅当 $r(G, \Omega) = 2$.

换句话说, G 在 Ω 上是 2- 传递的当且仅当对于任意的有序对 $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \Omega \times \Omega$, 其中 $\alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 \neq \beta_2$, 存在 $g \in G$ 使得 $\alpha_1 g = \beta_1, \alpha_2 g = \beta_2$.

29.10　推论

假设 G 在 Ω 上是 2- 传递的, 置换特征标是 π. 那么 $\pi = 1_G + \chi$, 其中 χ 是 G 的一个不可约的特征标.

证明　由推论 29.5 有 $\langle \pi, 1_G \rangle = 1$, 由命题 29.8 有 $\langle \pi, \pi \rangle = 2$. 那么由定理 14.17 结果得证. 证毕.

29.11　例子

(1) 对称群 S_n 在 $\{1, 2, ..., n\}$ 上是 2- 传递的. 同时 A_n在 $n \geqslant 4$ 的情况下是

2- 传递的. 因此这些群有一个不可约的特征标 χ, 这个不可约特征标由如下式子给出：

$$\chi(g) = |\mathrm{fix}(g)| - 1.$$

我们在前面的一系列例子中 (参见 18.1,19.16,19.17) 已经看到了这个不可约的特征标.

(2) 考虑 $G = GL(2,q)$(在例 29.1(3) 中出现的) 的作用. 这里 Ω 是 2 维向量空间 V 的所有的一维子空间组成的集合. 我们得到 G 在 Ω 上是 2- 传递的. 为了证明这个结果, 令 $(\langle v_1\rangle, \langle v_2\rangle)$ 和 $(\langle w_1\rangle, \langle w_2\rangle)$ 是 Ω 中的不同的一维空间组成的有序对. 那么 v_1, v_2 和 w_1, w_2 都是 V 的基. 因此从 V 到 V 的线性变换 $v_1 \mapsto w_1, v_2 \mapsto w_2$ 是可逆的, 它给出了 $GL(2,q)$ 中的一个元素, 这个元素把 $\langle v_1\rangle$ 映到了 $\langle w_1\rangle$, 把 $\langle v_2\rangle$ 映到了 $\langle w_2\rangle$. 因此 G 在 Ω 上是 2- 传递的. 因为 $|\Omega| = q+1$ (参见本章习题 2①), 由推论 29.10 给出的 G 的不可约的特征标 χ 就是定理 28.5 中次数为 q 的特征标 ψ_0.

(3) 考虑 S_n 在例子 29.1(2) 中定义的对上的作用, 其中 $n \geqslant 4$. 这个作用不是 2- 传递的, 因为没有 S_n 中的元素把 $(\{1,2\},\{3,4\})$ 映到 $(\{1,2\},\{2,3\})$. 事实上很容易看到 $G = S_n$ 在 $\Omega \times \Omega$ 上的轨道是 Δ, Δ_1 和 Δ_2, 其中 Δ 的定义如上, 并且

$$\Delta_1 = \{(\{i,j\},\{k,l\}) : |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 1\},$$
$$\Delta_2 = \{(\{i,j\},\{k,l\}) : |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 0\}.$$

因此 $\langle \pi, \pi\rangle = r(G,\Omega) = 3$, 所以 $\pi = 1_G + \chi + \psi$, 其中 χ 和 ψ 是 S_n 的不可约的特征标.

S_n 的一些不可约的特征标

由定理 12.15 我们知道 S_n 的共轭类与所有置换的可能的轮换型组成的集合是一一对应的. 每个轮换型 (包含 1- 轮换型) 是一个序列 $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_s)$, 其中 λ_i 是使得 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_s$ 和 $\lambda_1 + ... + \lambda_s = n$ 成立的正整数, 并且把这样的一个序列叫做 n 的一个分划.

由定理 15.3 我们知道 S_n 的不可约的特征标与 n 的分划 λ 也是一一对应的. 这样就可以得到对于每个分划 λ, 自然地对应着一个 S_n 的不可约的特征标 χ^λ. 我们将要应用这一章的结论来证明这个结论在 $\lambda = (n-k, k)$ 这样一个 2- 部分分划的情况 (参见下面的定理 29.13). 这个思想可以推广到证明一般的情况, 但是我们不打算在这里说, 如果想看更多的关于 S_n 的特征标理论的内容, 推荐读者参考在参考文献中 G.James[4] 写的书.

① 原书为“Exercise 1”, 译者修正为“习题 2”.

令 $G = S_n$, $I = \{1, 2, ..., n\}$. 对于一个整数 $k \leqslant n/2$, 定义 I_k 是 I 的所有的势为 k 的子集组成的集合. 就像在例 29.1(2) 中看到的那样, 可以如下定义 G 在 I_k 上的作用: 对于所有的子集 $A = \{i_1, ..., i_k\} \in I_k, g \in G$, 令

$$Ag = \{i_1 g, ..., i_k g\}.$$

令 π_k 是 G 在 I_k 上的作用的置换特征标. 注意到 $\pi_k(1) = |I_k| = C_n^k$.

29.12　命题

如果 $l \leqslant k \leqslant n/2$, 那么 $\langle \pi_k, \pi_l \rangle = l + 1$.

证明　由命题 29.6 我们知道 $\langle \pi_k, \pi_l \rangle = \mathrm{orb}(G, I_k \times I_l)$. 很容易看出 $G = S_n$ 在 $I_k \times I_l$ 上的轨道是 $J_0, J_1, ..., J_l$, 其中对于所有的 $0 \leqslant s \leqslant l$ 有

$$J_s = \{(A, B) \in I_k \times I_l : |A \cap B| = s\}.$$

因此 $\mathrm{orb}(G, I_k \times I_l) = l + 1$. 证毕.

29.13　定理

如果 n 是偶数令 $m = n/2$, 如果 n 是奇数令 $m = (n-1)/2$. 那么 S_n 有互不相同的不可约特征标 $\chi^{(n)} = 1_G, \chi^{(n-1,1)}, \chi^{(n-2,2)}, ..., \chi^{(n-m,m)}$ 使得对于所有的 $k \leqslant m$ 有

$$\pi_k = \chi^{(n)} + \chi^{(n-1,1)} + ... + \chi^{(n-k,k)}.$$

特别地, $\chi^{(n-k,k)} = \pi_k - \pi_{k-1}$.

证明　我们对 k 使用数学归纳法来证明存在不可约特征标 $\chi^{(n)}, \chi^{(n-1,1)}, ..., \chi^{(n-k,k)}$ 使得 $\pi_k = \chi^{(n)} + \chi^{(n-1,1)} + ... + \chi^{(n-k,k)}$. 由推论 29.10 知在 $k = 1$ 时这个结论成立.

现在假设这个结论对于所有的小于 k 的情况成立. 那么对于所有的 $i < k$, 存在不可约特征标 $\chi^{(n)}, \chi^{(n-1,1)}, ..., \chi^{(n-k+1,k-1)}$ 使得下式成立:

$$\pi_i = \chi^{(n)} + \chi^{(n-1,1)} + ... + \chi^{(n-i,i)}.$$

现在应用命题 29.12 我们知道

$$\langle \pi_k, 1_G \rangle = 1, \langle \pi_k, \pi_1 \rangle = 2, ..., \langle \pi_k, \pi_{k-1} \rangle = k, \langle \pi_k, \pi_k \rangle = k + 1.$$

所以存在某个不可约的特征标 χ 使得 $\pi_k = \pi_{k-1} + \chi$. 记 $\chi = \chi^{(n-k,k)}$, 有 $\pi_k = \chi^{(n)} + \chi^{(n-1,1)} + ... + \chi^{(n-k,k)}$. 证毕.

29.14 例子

(1) 式子 $\chi^{(n-k,k)} = \pi_k - \pi_{k-1}$ 使得计算 $\chi^{(n-k,k)}$ 的值变得容易. 例如, $\chi^{(n-k,k)}$ 的次数为

$$\chi^{(n-k,k)}(1) = \pi_k(1) - \pi_{k-1}(1) = C_n^k - C_n^{k-1}.$$

另外, 假设 $n = 7$, 计算不可约特征标 $\chi^{(5,2)}$ 在一个 3- 轮换型上的值:

$$\chi^{(5,2)}(123) = \pi_2(123) - \pi_1(123) = |\mathrm{fix}_{I_2}(123)| - |\mathrm{fix}_{I_1}(123)| = 6 - 4 = 2.$$

(2) 在例 19.17 中给出了 S_6 的特征标表, 不可约特征标 $\chi_1, \chi_3, \chi_7, \chi_9$ 分别等于 $\chi^{(6)}, \chi^{(5,1)}$, $\chi^{(4,2)}, \chi^{(3,3)}$.

第 29 章总结

1. G 在 Ω 上的作用是一个同态 $G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$. 由 $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow$ 存在 $g \in G$ 使得 $\alpha g = \beta$ 定义的关系下的 Ω 中的等价类是轨道. 包含 ω 的轨道 ω^G 的大小是 $|\omega^G| = |G : G_\omega|$.

2. 如果 G 作用在 Ω 上, 那么 $\mathbb{C}\Omega$ 是一个置换模, 并且相应的 G 的特征标是 π, 其中 $\pi(g) = |\mathrm{fix}_\Omega(g)|$. 轨道的数量是 $\langle \pi, 1_G \rangle$.

3. 秩 $r(G, \Omega)$ 是 G 在 $\Omega \times \Omega$ 上的轨道的数量, 并且 $r(G, \Omega) = \langle \pi, \pi \rangle$. 如果 G 是 2- 传递的, 那么 $r(G, \Omega) = 2$, 并且存在不可约特征标 χ 使得 $\pi = 1_G + \chi$.

4. S_n 的不可约的特征标与 n 的分划是一一对应的. 2- 部分分划对应的不可约特征标 $\chi^{(n-k,k)}$ 的值由定理 29.13 给出.

第 29 章习题

1. 令 G 是一个有限群, 对于所有的 $x, g, h \in G$, 如下定义函数 $\phi : G \times G \to \mathrm{Sym}(G)$

$$x((g,h)\phi) = g^{-1}xh.$$

(a) 证明 ϕ 是 $G \times G$ 在 G 上的作用, 并且 ϕ 是传递的.

(b) 求单位元 $1 \in G$ 的稳定化子 $(G \times G)_1$, 并求 $\mathrm{Ker}\phi$.

(c) 证明这个作用的秩 $r(G \times G, G)$ 等于 G 的共轭类的数量, 并且置换特征标 π 是

$$\pi = \sum_\chi \chi \times \overline{\chi},$$

其中求和是在 G 的所有的不可约的特征标上进行的, 并且 $\chi \times \overline{\chi}$ 是由定理 19.18 给出的 $G \times G$ 的不可约的特征标.

2. 证明如果 Ω 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 2 维向量空间的所有的一维子空间组成的集合 (就像例 29.1(3) 那样), 那么 $|\Omega| = q+1$.

3. 令 $G = GL(2,q)$, 令 $V = \mathbb{F}_q^2$(就像 29.1(2) 那样). 令 $V^* = V - \{0\}$, 对于所有的 $v \in V^*, g \in G$, 如下定义一个作用 $\phi: G \to \mathrm{Sym}(V^*)$

$$v(g\phi) = vg.$$

令 π 是 G 在这个作用下的置换特征标.

把 π 分解成 $G = GL(2,q)$ 的不可约的特征标的和 (后者在定理 28.5 中已经给出).

(提示: 一种方法是写出 π 在 G 的共轭类的上的值, 并与在 28.5 中给出的 G 的不可约的特征标作内积.)

4. 令 G 是一个有限群, 令 H_1, H_2 是 G 的子群. 对于 $i = 1, 2$, 定义 Ω_i 是 H_i 在 G 中的右陪集组成的集合, 并且 G 在 Ω_i 上的作用就像例 29.1(4) 中给出的那样. 令 π_i 是 G 在 Ω_i 上作用的置换特征标. 假设 $\pi_1 = \pi_2$.
证明如果 G 是交换群, 那么 $H_1 = H_2$.

举一个例子说明这个结论在一般情况下是不成立的.

5. 令 G 是一个阶数大于 1 的有限群, 并且 G 作用在 Ω 上是传递的. 证明 G 包含一个元素 g 使得 $|\mathrm{fix}_\Omega(g)| = 0$.

这样的一个元素叫做 G 的一个固定点自由元.

6. 令 n 是一个正整数, Ω 是所有的有序对 (i,j) 组成的集合, 其中 $i,j \in \{1,2,...,n\}, i \neq j$. 令 S_n 以一种显然的方式作用在 Ω 上 (即对于 $g \in S_n$ 来说, $(i,j)g = (ig, jg)$), 令 S_n 在这种作用下的置换特征标是 $\pi^{(n-2,1,1)}$.

通过定理 29.13 证明过程中的内积证明

$$\pi^{(n-2,1,1)} = 1 + 2\chi^{(n-1,1)} + \chi^{(n-2,2)} + \chi,$$

其中 χ 是一个不可约的特征标.

记 $\chi = \chi^{(n-2,1,1)}$, 计算 $\chi^{(n-2,1,1)}$ 的次数, 并计算它在 S_n 的元素 (12) 和 (123) 上的值.

在例 19.17 中给出的 S_6 的特征标表中, 哪个不可约特征标是等于 $\chi^{(4,1,1)}$ 的?

第30章　在群论中的应用

到目前为止我们遇到了许多应用群的特征标理论来确定群的结构的方法. 例如, 寻找群的中心, 判断一个群是否为单群等. 在本章中我们将给出特征标理论的更深层次的应用. 首先通过特征标来确定类代数常数, 并用它来分析群 G 的子群结构. 第二个更加深入的应用为 Brauer-Fowler 定理, 该定理极大地促进了对有限单群包含一个对合元, 并且该对合元中心化子与某个给定的群 C 同构的理论的研究, 在本章中将讨论 $C = D_8$ 的情况.

类代数常数

假设 G 是一个有限群,$C_1, \cdots, C_l$ 为它的互不相同的共轭类. 根据命题 12.22 可知 $\overline{C_1}, \cdots, \overline{C_l}$ 构成群代数 $\mathbb{C}G$ 的中心的一组基 (其中 $\overline{C_i} = \sum\limits_{g \in C_i} g$).

30.1　命题

存在一个非负整数 a_{ijk} 使得对于 $1 \leqslant i \leqslant l, 1 \leqslant j \leqslant l$ 有

$$\overline{C}_i \overline{C}_j = \sum_{k=1}^{l} a_{ijk} \overline{C}_k.$$

证明　对于 $g \in C_k$,g 在 $\overline{C}_i\overline{C}_j$ 中的系数等于满足 $a \in C_i, b \in C_j$ 且 $ab = g$ 的元素对 (a, b) 的个数. 这个数为一个非负整数, 且与从 C_k 所取的共轭类代表元 g 无关. 证毕.

可以从另一个角度来看待命题 30.1: 因为 $\overline{C}_i\overline{C}_j$ 属于 $Z(\mathbb{C}G)$, 因此它必为 $\overline{C_1}, \ldots, \overline{C_l}$ 的线性组合.

30.2　定义

公式 $\overline{C}_i\overline{C}_j = \sum\limits_{k=1}^{l} a_{ijk}\overline{C}_k$ 中的整数 a_{ijk} 被称为群 G 的类代数常数.

根据上面的定义, 数字 a_{ijk} 包含的群 G 的许多乘法信息:

(30.3)　对于所有的 $g \in C_k$ 以及所有的 i, j 有

$$a_{ijk} = \text{满足}\quad a \in C_i, b \in C_j \quad \text{且} \quad ab = g \quad \text{的元素对}(a, b)\text{的个数}.$$

同样地, 由于 $\overline{C_1},\ldots,\overline{C_l}$ 构成 $Z(\mathbb{C}G)$ 的一组基, 故 a_{ijk} 也决定了 $Z(\mathbb{C}G)$ 中元素的乘积. 由于群代数的中心在群表示论中的重要作用, 故读者应该会猜测类代数常数与群的特征标表必然有某种关系, 事实上, 下面的定理给出了两者之间的重要联系.

30.4　定理

假设 $g \in C_i (1 \leqslant i \leqslant l)$. 则对于所有的 i, j, k 有

$$a_{ijk} = \frac{|G|}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\sum_{\chi}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}.$$

其中 χ 取遍群 G 的所有不可约特征标.

证明　假设 χ 是群 G 的一个不可约特征标, 且 U 是特征标 χ 所对应的 $\mathbb{C}G$-模. 则根据引理 22.7 可知, 对于所有的 $u \in U$ 有

$$u\overline{C}_i = \frac{|G|\chi(g_i)}{|C_G(g_i)|\chi(1)}u.$$

因此

$$u\overline{C}_i\overline{C}_j = \frac{|G|^2}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)}{(\chi(1))^2}u,$$

且

$$\sum_{m=1}^{l} a_{ijm}u\overline{C}_m = \sum_{m=1}^{l} a_{ijm}\frac{|G|\chi(g_m)}{|C_G(g_m)|\chi(1)}u.$$

因此根据 $\overline{C}_i\overline{C}_j = \sum_m a_{ijm}\overline{C}_m$ 可得

$$\textbf{(30.5)}\quad \sum_{m=1}^{l} a_{ijm}\frac{\chi(g_m)}{|C_G(g_m)|} = \frac{|G|}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)}{\chi(1)}.$$

在 $1 \leqslant k \leqslant l$ 中选取一个 k. 在方程 (30.5) 的两边同时乘以 $\overline{\chi(g_k)}$ 并对群 G 的所有不可约特征标求和, 则可知

$$\sum_{m=1}^{l} a_{ijm}\sum_{\chi}\frac{\chi(g_m)\overline{\chi(g_k)}}{|C_G(g_m)|} = \frac{|G|}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\sum_{\chi}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}.$$

最后根据列正交关系 (定理 16.4(2)) 可知

$$a_{ijk} = \frac{|G|}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\sum_{\chi}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}.$$

证毕.

例　　子

30.6　例子

在本例中我们将要根据类代数常数来证明对称群 S_4 上的元素及其子群的一些性质. 虽然可以直接证明这些结论, 但是类代数常数也提供了一种有效的方法. 假设 $G = S_4$. 根据 18.1 节, 群 G 的特征标表为

共轭类C_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
$\|C_G(g_i)\|$	24	4	3	8	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

(1) 运用定理 30.4 计算类代数常数 a_{555}:

$$a_{555} = \frac{24}{4 \cdot 4}\left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}\right) = 0.$$

因此, 根据 (30.3), S_4 中不存在两个四阶元 a, b 使得它们的乘积 ab 仍为四阶元. 因此 S_4 中没有子群同构于 Q_8, 因为 Q_8 中存在两个四阶元, 使得它们的乘积仍为四阶元.

(2) 根据定理 30.4,

$$a_{245} = \frac{24}{4 \cdot 8}\left(1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = 2.$$

因此 S_4 中存在两个二阶元 a, b 使得它们的乘积 ab 为四阶元. 记 $x = ab$, 则

$$x^4 = 1, \quad a^{-1}xa = ba = (ab)^{-1} = x^{-1},$$

因此 $\langle a, b\rangle \cong D_8$. 即在 S_4 中存在一个子群与 D_8 同构 (在习题 18.1 中我们已经知道这个结论).

(3) 最后

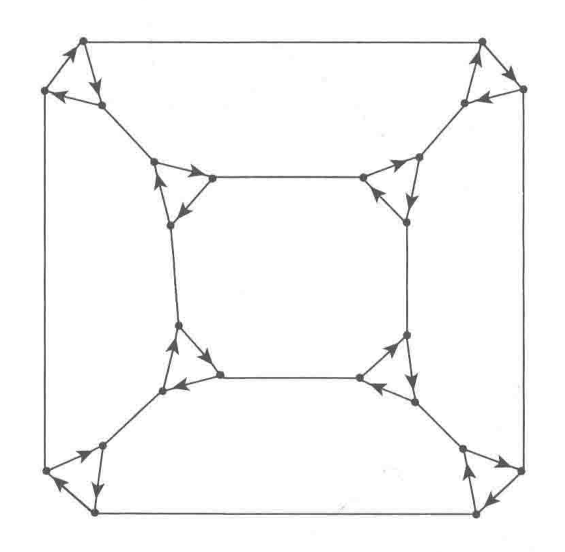
$$a_{235} = \frac{24}{4 \cdot 3}(1 + 1) = 4,$$

因此 S_4 中存在一个二阶元 a 与一个三阶元 b 使得它们的乘积 ab 为四阶元. 事实

上可以证明 S_4 有如下的表示方式:

$$S_4 = \langle a, b : a^2 = b^3 = (ab)^4 = 1 \rangle.$$

换句话说, 即 S_4 可以由 a, b 生成, 且 S_4 中所有元素的乘积可以由这些关系给出. 下面用一个图形来标示这些元素的运算关系[①]:



30.7　例子

我们运用定理 30.4 中给出的单群 $PSL(2,7)$ 的特征标表来寻找它的一个子群 H, 其中 $H \cong S_4$. 这个结果并不显然, 并且也很难通过构造直接得到. 根据 27 章结论可知 $G = PSL(2,7)$ 的特征标表为 (其中 $\alpha = (-1+i\sqrt{7})/2$)

共轭类代表元g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_i的阶数	1	2	4	3	7	7
中心化子的阶数	168	8	4	3	7	7
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	-1	1	0	0
χ_3	8	0	0	-1	1	1
χ_4	3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$
χ_5	3	-1	1	0	$\overline{\alpha}$	α
χ_6	6	2	0	0	-1	-1

根据定理 30.4 可知

① 原书图右上角的三角形的底边箭头相反, 此图为译者修正后的图.

$$a_{243}=\frac{168}{8\cdot 3}\left(1+\frac{1}{7}+0+0+0+0\right)=8.$$

因此, 由 (30.3), G 中存在一个二阶元 x 与一个三阶元 y 使得它们的乘积 xy 为四阶元. 假设 $H=\langle a,b\rangle$. 根据例 30.6 可知

$$S_4=\langle a,b:a^2=b^3=(ab)^4=1\rangle.$$

因此存在从 S_4 到 H 上 ($\phi=a\mapsto x, b\mapsto y$) 的一个同态 ϕ. 由定理 1.10 有 $S_4/\mathrm{Ker}\phi\cong H$. 现在 $\mathrm{Ker}\ \phi$ 作为 S_4 的一个正规子群是 $\{1\},V_4,A_4$ 或 S_4(见例 12.20). 所以 $H\cong S_4,S_3,C_2$ 或 $\{1\}$ 因为 H 有一个 4 阶元, 即 xy, 所以 $H\cong S_4$ 因此我们证明了 $PSL(2,7)$ 有一个同构于 S_4 的子群.

Brauer 纲领

Brauer-Fowler 定理 (定理 23.19) 表明对于一个给定的群 C, 满足存在一个对合元, 且对合元的中心化子与 C 同构这一条件的有限单群 G 在同构意义下只有有限个. 这一事实促使 Brauer 去寻找在 C 给定的情况下所有满足条件的 G. 值得注意的是, Brauer 的这一工作是有限单群分类的重要组成部分. 有限单群的分类在 20 世纪 80 年代早期彻底完成 (读者可以在参考文献 D.Gorenstein[3] 的书中了解其详细情况). 下面的定理取自 Brauer 纲领的一部分, 即 $C=D_8$ 的情况, 该定理确定了满足 $C_G(t)\cong D_8$ 的有限单群的所有可能的阶数. 我们选择论述这一结果是因为它深刻的体现了特征标理论在群论中的重要应用.

30.8 定理

设群 G 是一个有限非交换单群, 且它有一个对合元 t 满足 $C_G(t)\cong D_8$, 则群 G 的阶数为 168 或者 360.

注意到群 $PSL(2,7)$是一个 168 阶单群满足存在一个对合元 t, 使得 $C_G(t)\cong D_8$(见引理 27.1); 而 A_6 是一个 360 阶单群, 且具有该性质 (见本章习题 7). 运用其他一些群论的更复杂的知识还可以证明 $PSL(2,7)$ 与 A_6是唯一的满足阶数为 168 或 360 的单群, 在本书中并不证明这一结果. 在证明定理 30.8 之前, 我们还需要一些基本的结论, 首先给出的是 Sylow 定理, 此处直接给出结果而不进行证明, 有兴趣的读者可以看参考文献中 J.B.Fraleigh[2] 的书中定理 18.3 和定理 18.4.

30.9 Sylow 定理

假设 p 是一个素数, G 是一个 p^ab 阶的有限群, 其中 a,b 为正整数, 且 $p\nmid b$. 则

(1) G 包含一个阶数为 p^a 的子群; 这个群称为群 G 的 Sylow p-子群.

(2) 群 G 所有的 Sylow p-子群均相互共轭 (即若 P、Q 是 Sylow p- 子群, 则存在 $g \in G_1$ 使得 $g^{-1}pg = Q$).

(3) 若 R 是群 G 的一个阶数为 p^c 的子群, 则 R 必包含在 G 的一个 Sylow p-子群中.

30.10 引理

假设群 G 是一个有限非交换单群, 且 P 为群 G 的一个 Sylow 2-子群. 设 Q 是 P 的一个子群, 且 $|P:Q| = 2$. 若 u 是群 G 的一个对合元, 则 u 必与群 Q 中的某个元素共轭.

证明　假设 u 与 Q 中的任何元素均不共轭. 令 Ω 为 Q 在 G 中的右陪集 Qx 组成的集合, 定义群 G 在 Ω 上的作用为 $(Qx)g = Qxg(x, g \in G)$(见例 29.2(4)). 从而可知 $|\Omega| = 2|G:P| = 2m$, 其中 m 为奇数, 因为 P 是一个 Sylow 2-子群. 现在考虑 $\mathrm{fix}_\Omega(u) = \{\omega \in \Omega : \omega u = \omega\}$. 若 $Qx \in \mathrm{fix}_\Omega(u)$, 则 $Qxu = Qx$, 从而 $xux^{-1} \in Q$, 与假设矛盾. 因此 $\mathrm{fix}_\Omega(u) = \varnothing$. 该结论表明对于上面定义的作用, 对合元 u 相当于 m 个互不相交的 2-轮换型的乘积, 因此它是一个奇置换, 从而子群

$$\{g \in G : g\text{在}\Omega\text{上的作用是一个偶置换}\}$$

是群 G 的一个指数为 2 的正规子群. 由于 G 是一个单群, 从而推出矛盾, 因此命题假设不成立. 证毕.

我们还需要引入广义特征标的知识. 群 H 的广义特征标为具有下列形式的类函数

$$\psi = \sum_{\chi} n_\chi \chi,$$

其中 χ 取遍 H 的所有不可约特征标, 且 $n_\chi \in \mathbb{Z}$. 若对于所有的 χ 有 $n_\chi \geqslant 0$, 则 ψ 为正常的特征标, 但是对于广义特征标并无该要求. 特别地, 对于广义特征标 ψ 来说, $\psi(1)$ 可能等于 0 或者负值. 注意根据正交关系, 可知

$$\langle \psi, \chi \rangle = n_\chi, \langle \psi, \psi \rangle = \sum (n_\chi)^2,$$

其中 ψ 为上面定义的广义特征标. 群 H 的广义特征标 ψ 可以分解成两个特征标 α, β 的差, 其中

$$\alpha = \sum_{n_\chi \geqslant 0} n_\chi \chi, \beta = \sum_{n_\chi < 0} n_\chi \chi.$$

最后假设 H 是 G 的一个子群, 可以定义广义特征标在 G 上的诱导特征标 $\psi \uparrow G$ 为

$$\psi \uparrow G = (\alpha \uparrow G) - (\beta \uparrow G),$$

其中 $\psi = \alpha - \beta$ 如上所述. 显然命题 21.19 与推论 21.20 中的结论对于 $\psi \uparrow G$ 也成立.

定理 30.8 的证明　设 G 是一个非交换有限单群, 它有一个对合元 t, 满足 $C_G(t) = D \cong D_8$. 由于 t 与自身可交换从而 $t \in D$; 同时由于 t 与 D 中的所有元素可交换, 从而 $t \in Z(D)$. 由于 D_8 的中心是 2 阶循环群 (见 12.12), 从而 $Z(D) = \langle t \rangle$.

根据定理 30.9(3), 群 G 有一个 Sylow 2-子群 P 满足 $D \leqslant P$. 从而 $Z(P) \leqslant C_G(t) = D$, 因此 $Z(P) \leqslant Z(D) = \langle t \rangle$. 根据引理 26.1(1) 可知 $Z(P) \neq \{1\}$, 故 $Z(P) = \langle t \rangle$. 因此 $P \leqslant C_G(t) = D$, 从而有 $P = D$. 换句话说 D 是群 G 的一个 Sylow 2-子群.

记 $D = \langle a, b \rangle$, 其中 $a^4 = b^2 = 1$, 且 $b^{-1}ab = a^{-1}$. 因此 $t = a^2$. 假设 $C = \langle a \rangle$ 为群 D 的指数为 2 的循环子群. 则根据引理 30.10 可知群 G 的每一个对合元均与 C 中的某个对合元共轭. 由于 $t = a^2$ 是唯一的这样一个对合元, 从而可知 t^G 是 G 中唯一的包含对合元的共轭类.

接下来, 假设 $g \in G$ 且对于所有的非单位元 $c \in C$ 有 $g^{-1}cg \in C$. 由于 $t = c$ 或者 c^2, 故必然有 $g^{-1}tg = t$, 从而 $g \in C_G(t) = D$, 进而有 $g^{-1}Cg = C$. 我们将已经证明的结论总结如下:

(30.11)　D 是 G 的一个 Sylow 2-子群; t^G 是群 G 中唯一的包含对合元的共轭类; 对于任意的 $g \in G$ 有 $C \cap g^{-1}Cg = \{1\}$ 或者 C; 并且若 $C \cap g^{-1}Cg = C$, 则 $g \in D$.

上面是在证明该定理时所要用到的所有的群论知识, 下面给出有关特征标的结论. 假设 λ 是 C 的一个线性特征标满足 $\lambda(a) = i$, 并且定义

$$\theta = (1_C \uparrow D) - (\lambda \uparrow D)$$

是群 D 的一个广义特征标. 则 θ 在 a, a^{-1} 上的值为 2, 在 t 上的值为 4, 在其他元素上取值为 0. 根据例 16.3(3) 中给出的 D_8 的特征标表可知 $\theta = \chi_1 + \chi_2 - \chi_5$(特别地, $\theta(1) = 0$). 因此 $\langle \theta, \theta \rangle = 3$. 下面证明

(30.12)　$$\langle \theta \uparrow G, \theta \uparrow G \rangle = 3.$$

为了证明该结果, 首先根据 Frobenius 互反律可知 $\langle \theta \uparrow G, \theta \uparrow G \rangle = \langle (\theta \uparrow G) \downarrow D, \theta \rangle$. 当 $1 \neq c \in C$ 时, 根据命题 21.19 可知

$$(\theta \uparrow G)(c) = \frac{1}{8} \sum_{y \in G} \dot{\theta}(y^{-1}cy).$$

根据 (30.11) 可知, 若 $y^{-1}cy \in C$, 则 $y \in D$, 因此 $y^{-1}cy = c^{\pm 1}$ 且 $\theta(y^{-1}cy) = \theta(c)$; 若 $y^{-1}cy \in D - C$, 则 $\theta(y^{-1}cy) = 0$. 因此 $(\theta \uparrow G)(c) = \theta(c)$. 由于 θ 在 $D - C$ 上取值为 0, 从而可知 $\langle (\theta \uparrow G) \downarrow D, \theta \rangle = \langle \theta, \theta \rangle = 3$, 即等式 (30.12) 成立.

由于 $\langle\theta\uparrow G, 1_G\rangle = \langle 1_C - \lambda, 1_C\rangle = 1$, 且 $(\theta\uparrow G)(1) = 0$(见推论 21.20), 从而根据等式 (30.12) 可知

$$\theta\uparrow G = 1_G + \alpha - \beta,$$

其中 α, β 为群 G 的不可约特征标. 由于已经证明了 $(\theta\uparrow G)(t) = \theta(t) = 4$, 故到目前为止我们证明了如下结果:

(30.13)　$\theta\uparrow G = 1_G + \alpha - \beta$, 其中 α, β 为群 G 的不可约特征标, 且满足 $1+\alpha(1) - \beta(1) = 0, 1 + \alpha(t) - \beta(t) = 4$.

注意根据推论 13.10 可知 $\alpha(t), \beta(t)$ 均为整数.

现在引入群 G 的一个类函数 γ: 对于 $g \in G$, 定义 $\gamma(g)$ 为满足 $g = xy$ 的有序元素对 $(x, y) \in t^G \times t^G$ 的个数. 若假设 $t^G = C_i$ 且 g 在群 G 的共轭类 C_k 中, 则 $\gamma(g) = a_{iik}$ (其中 a_{iik} 如 (30.3) 中定义). 因此根据定理 30.4 可以得到下面的结论:

(30.14)
$$\gamma = \frac{|G|}{|D|^2}\sum_{\chi}\frac{\chi(t)^2}{\chi(1)}\overline{\chi}\text{①}.$$

其中 χ 取遍群 G 的所有不可约特征标. 下面通过两种方式计算 γ 与 $\theta\uparrow G$ 的内积. 首先, 根据 (30.13) 和 (30.14) 可知

(30.15)
$$\langle\theta\uparrow G, \gamma\rangle = \frac{|G|}{64}\left(1 + \frac{\alpha(t)^2}{\alpha(1)} - \frac{\beta(t)^2}{\beta(1)}\right).$$

另一方面, 根据 Frobenius 互反律可知 $\langle\theta\uparrow G, \gamma\rangle = \langle 1_C - \lambda, \gamma\downarrow C\rangle$. 现在对 $1 \neq c \in C$ 的情况求 $\gamma(c)$. 假设 $c = xy$(其中 $x, y \in t^G$), 则 $x^{-1}cx = yx = c^{-1}$, 因此根据 (30.11) 可知 $x \in D$; 同样地可以得到 $y \in D$. 现在在 D_8 中进行计算可知 $\gamma(c) = 4$. 因此

$$\langle 1_C - \lambda, \gamma\downarrow C\rangle = \frac{1}{|C|}\cdot 4\cdot((1-i) + 2 + (1+i)) = 4.$$

从而根据 (30.15) 可知

(30.16)
$$|G|\left(1 + \frac{\alpha(t)^2}{\alpha(1)} - \frac{\beta(t)^2}{\beta(1)}\right) = 2^8.$$

现在可以根据上述等式来证明定理 30.8 成立. 记 $d = \alpha(1), e = \alpha(t) \in \mathbb{Z}$. 根据 (30.13) 可以得到 $\beta(1) = d + 1, \beta(t) = e - 3$. 根据 16.4(2) 的列正交关系可知

$$8 = |C_G(t)| \geqslant 1 + \alpha(t)^2 + \beta(t)^2 = 1 + e^2 + (e-3)^2,$$

① 原书为“$\gamma = \frac{|G|}{|D|^2}\sum_{\chi}\frac{\chi(t)^2}{\chi(1)}\chi$”, 译者修正为“$\gamma = \frac{|G|}{|D|^2}\sum_{\chi}\frac{\chi(t)^2}{\chi(1)}\overline{\chi}$”.

由此可知 $e=1$ 或者 2. 当 $e=1$ 时, 根据 (30.16) 可知 $|G|\left(1+\frac{1}{d}-\frac{4}{d+1}\right)=2^8$, 因此

$$|G|=2^8\frac{d(d+1)}{(d-1)^2}.$$

由于 $d-1$ 与 $d+1$ 的最大公因数为 1 或 2, 而 $d-1$ 与 d 的最大公因数为 1. 故 $(d-1)^2$ 必然整除 2^{10}, 从而 $d-1=2^r$(其中 $r\leqslant 5$). 并且由于 G 包含一个阶数为 8 的 Sylow 2-子群, 故 $r=3, d=9$, 从而推出 $|G|=360$, 从而定理 30.8 中的一种可能性得证.

当 $e=2$ 时, 根据根据 (30.16) 可知

$$|G|=2^8\frac{d(d+1)}{(d+2)^2}.$$

运用与上面同样的论述方法可知 $d+2=2^3$, 从而推出 $d=6, |G|=168$. 证毕.

第 30 章总结

1. 类代数常数 a_{ijk} 由下式给出

$$\overline{C}_i\overline{C}_j=\sum_{k=1}^{l}a_{ijk}\overline{C}_k.$$

它们可以通过特征标表来直接计算, 其计算公式为

$$a_{ijk}=\frac{|G|}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\sum_{\chi}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}.$$

2. 给定群 G 和群 H, 在一些情况下群 G 的类代数常数可以用来判断群 H 是否与群 G 的一个子群同构.

3. 运用 Sylow 定理以及一些特征标理论, 可以证明: 对于任何一个单群 G, 若它有一个对合元 t, 满足 $C_G(t)\cong D_8$, 则群 G 的阶数必为 168 或者 360.

第 30 章习题

1. 运用群 $PSL(2,7)$的特征标表证明,$PSL(2,7)$ 中存在一个二阶元 a 与一个三阶元 b 使得它们的乘积 ab 为七阶元.

2. 判断 $PSL(2,7)$ 是否有一个子群同构于 D_{14}.

(提示: $D_{14}=\langle a,b: a^2=b^2=1,(ab)^7=1\rangle$.)

在下面的三个习题中均假设 A_5 是一个单群, 其中 $A_5=\langle a,b: a^2=b^3=1,(ab)^5=1\rangle$.

3. 运用群 $PSL(2,11)$的特征标表 (见习题 27.6), 判断 $PSL(2,11)$ 是否有一个子群同构于 A_5.

4. 证明 A_5 完全由它的特征标表所唯一确定, 即若 G 与 A_5(参见例子 20.13) 具有相同的特征标表, 则 $G \cong A_5$.

5. 假设 G 为一个群, 且它的特征标表如下所述.

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	5	1	-1	2	-1	0	0
χ_3	5	1	-1	-1	2	0	0
χ_4	8	0	0	-1	-1	α	β
χ_5	8	0	0	-1	-1	β	α
χ_6	9	1	1	0	0	-1	-1
χ_7	10	-2	0	1	1	0	0

其中 $\alpha = (1+\sqrt{5})/2, \beta = (1-\sqrt{5})/2$.

(a) 证明 G 是 360 阶单群.

(b) 运用 Frobenius-Schur 对合数计数原理得到群 G 的对合元个数的一个上界, 并证明 g_2 的阶数为 $2, g_3$ 的阶数为 4.

(c) 证明 G 有一个子群 H 同构于 A_5.

(d) 运用习题 23.9 证明 $G \cong A_6$.

6. 运用例 30.6(3) 中给出的图形证明: 若群 G 由两个元素 a, b 生成, 且 $a^2 = b^3 = (ab)^4 = 1$, 则群 G 的阶数至多为 24.

7. 证明 $PSL(2,7)$与 A_6分别是阶数为 168 和 360 的单群, 且它们都含有一个对合元 t, 使得 t 的中心化子与 D_8 同构.

8. 找到一个单群 G, 使得它包含一个对合元 t, 满足 $C_G(t) \cong D_{16}$. (提示: 寻找一个合适的单群 $PSL(2,p)$.)

第 31 章　Burnside 定理

表示论的一个重要的应用是 Burnside 定理: 如果 p 和 q 为素数, a 和 b 为正整数, 那么 $p^a q^b$ 阶群均不为单群. 在 *Theory of groups of finite order (1897)* 的第一版中, Burnside 利用群理论知识证明了这个定理在 a, b 取特殊值的情况, 但是在学习群表示的 Frobenius 理论之后才能证明这个定理的一般情况. 其实, 后人一直尝试不用表示论的知识来证明这个定理, 但都失败了. 直到 1972 年 H.Bender 成功了.

预 备 引 理

为了证明 Burnside 定理, 引入关于特征标取值的引理 (31.2) 做准备. 为了建立这个引理, 我们需要一些关于代数整数与代数学的结论. 为了叙述简明, 将这些证明过程忽略, 读者可以参看所列书目中由 Pollard 和 Diamond[6] 所写的书.

代数数是能作为 $\mathbb{Q}$ 上的某个非零多项式的一个根的复数. 我们称关于 x 的多项式是首一的, 如果 x 的最高幂次系数为 1.

令 α 为代数数, $p(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上以 α 为根次数最小的首一多项式. 那么 $p(x)$ 是唯一的且不可约的; 称为 α 的最小多项式. $p(x)$ 的根称为 α 的共轭.

例如, 若 ω 为 n 次单位根, 那么 ω 的最小多项式整除 $x^n - 1$, 所以 ω 的每个共轭也是一个 n 次单位根.

若 α 为一个代数整数, 那么 α 是一个整系数首一多项式的根 (参见 22 章). 并且 α 的最小多项式也是整系数的.

关于共轭元我们有如下结论.

(31.1)　令 α, β 为代数数. 那么 $\alpha + \beta$ 的每个共轭元都有形式 $\alpha' + \beta'$, 其中 α' 是 α 的一个共轭, β' 是 β 的一个共轭. 此外, 若 $r \in \mathbb{Q}$, 那么 $r\alpha$ 的每个共轭元都有形式 $r\alpha'$, 其中 α' 是 α 的一个共轭.

关于这个的证明, 可以参见 Pollard 和 Diamond[6] 的书中的第五章第三部分. 另外, (31.1) 可以利用一些伽罗瓦理论很容易的证明出来.

31.2　引理

令 χ 为有限群 G 的一个特征标. 令 $g \in G$. 那么 $|\chi(g)/\chi(1)| \leqslant 1$, 并且如果

$$0 < |\chi(g)/\chi(1)| < 1,$$

那么 $\chi(g)/\chi(1)$ 不是一个代数整数.

证明 令 $\chi(1)=d$. 根据命题 13.9, 有 $\chi(g)=\omega_1+\ldots+\omega_d$, 其中每个 ω_i 都是一个单位根, 所以

$$\chi(g)/\chi(1)=(\omega_1+\ldots+\omega_d)/d.$$

因为 $|\chi(g)|=|\omega_1+\ldots+\omega_d|\leqslant|\omega_1|+\ldots+|\omega_d|=d$, 所以 $|\chi(g)/\chi(1)|\leqslant 1$.

现在假设 $\chi(g)/\chi(1)$ 是一个代数整数, 且 $|\chi(g)/\chi(1)|<1$. 证明 $\chi(g)=0$.

记 $\gamma=\chi(g)/\chi(1)$, 令 $p(x)$ 为 γ 的最小多项式, 所以

$$p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

其中对任意的 $i,a_i\in\mathbb{Z}$. 根据 (31.1), γ 的每个共轭元都是

$$(\omega_1'+\ldots+\omega_d')/d$$

形式, 其中 $\omega_1',\ldots,\omega_d'$ 为单位根. 因此 γ 的每个共轭元的模至多为 1. 所以如果 λ 为所有 γ 的共轭元的积 (含 γ), 那么 $|\lambda|<1$. 但根据定义, γ 的共轭元为多项式 $p(x)$ 的根, 所有这些根的乘积等于 $\pm a_0$. 这样

$$\lambda=\pm a_0.$$

因为 $a_0\in\mathbb{Z}$ 且 $|\lambda|<1$, 所以 $a_0=0$. 因为 $p(x)$ 是不可约的, 这意味着 $p(x)=x$, 从而就有 $\gamma=0$. 所以 $\chi(g)=0$. 证毕.

Burnside p^aq^b 定理

我们将从 Burnside 的另一个有意思的定理来推出主要的结论, 定理 31.4.

31.3 定理

令 p 为一个素数, r 为大于等于 1 的一个整数. 假设 G 为有限群, 含一个大小为 p^r 的共轭类. 那么 G 不是单群.

证明 令 $g\in G$, 其中 $|g^G|=p^r$. 因为 $p^r>1$, G 非交换且 $g\neq 1$. 与往常一样, 记 G 的不可约特征标为 $\chi_1,\ldots,\chi_k$, 取 χ_1 为平凡特征标.

对 G 的特征标表中的 1 和 g 所在列应用列正交关系, 则根据定理 16.4(2), 有

$$1+\sum_{i=2}^{k}\chi_i(g)\chi_i(1)=0.$$

所以

$$\sum_{i=2}^{k} \chi_i(g) \cdot \frac{\chi_i(1)}{p} = -\frac{1}{p}.$$

现在根据命题 22.5, $-1/p$ 不是代数整数. 所以对某个 $i \geqslant 2, \chi_i(g)\chi_i(1)/p$ 不是代数整数 (参见定理 22.3). 因为 $\chi_i(g)$ 为代数整数 (推论 22.4), 所以 $\chi_i(1)/p$ 不是代数整数; 换句话说, p 不能整除 $\chi_i(1)$. 这样

$$\chi_i(g) \neq 0 \text{且} p \nmid \chi_i(1).$$

因为 $|g^G| = p^r$, 说明 $\chi_i(1)$ 和 $|g^G|$ 是互素的整数, 所以存在整数 a, b 使得

$$a|G : C_G(g)| + b\chi_i(1) = 1.$$

因此

$$a\frac{|G|\chi_i(g)}{|C_G(g)|\chi_i(1)} + b\chi_i(g) = \frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)}.$$

根据推论 22.10 和 22.4, 等式左边为代数整数; 因为 $\chi_i(g) \neq 0$, 所以它非零. 现在引理 31.2 说明

$$|\chi_i(g)/\chi_i(1)| = 1.$$

令 ρ 为 G 的特征标为 χ_i 的一个表示. 根据定理 13.11(1), 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得

$$g\rho = \lambda I.$$

令 $K = \operatorname{Ker}\rho$, 所以 K 是 G 的一个正规子群. 因为 χ_i 不是平凡特征标, $K \neq G$. 若 $K \neq \{1\}$ 那么 G 是非单的; 所以假设 $K = \{1\}$, 也就是 ρ 是一个忠实表示.

因为 $g\rho$ 为数乘变换, 对任意的 $h \in G$, $g\rho$ 与 $h\rho$ 可交换. 由于 ρ 是忠实表示, 所以 g 与任意的 $h \in G$ 可交换; 换句话说

$$g \in Z(G).$$

所以 $Z(G) \neq \{1\}$. 因为 $Z(G)$ 是 G 的正规子群, 且 $Z(G) \neq G$, 因此 G 是非单的. 证毕.

现在看这章的主要结论 Burnside 定理.

31.4 Burnside p^aq^b 定理

令 p, q 为素数, a, b 为非负整数且 $a + b \geqslant 2$. 如果 G 为 p^aq^b 阶群, 那么 G 不是单群.

证明　首先假设 $a=0$ 或者 $b=0$. 那么 G 的阶为一个素数的幂次, 所以根据引理 26.1(1) 有 $Z(G)\neq\{1\}$. 选取素数阶 $g\in Z(G)$. 那么 $\langle g\rangle\lhd G$, 且 $\langle g\rangle$ 不等于 $\{1\}$ 或 G. 因此 G 是非单的.

现在假设 $a>0,b>0$. 根据 30.9 的 Sylow 定理, G 有一个 q^b 阶子群 Q. 根据引理 26.1(1) 有 $Z(Q)\neq\{1\}$. 令 $g\in Z(Q),g\neq 1$. 那么 $Q\leqslant C_G(g)$, 所以存在某个 r 使得

$$|g^G|=|G:C_G(g)|=p^r.$$

若 $p^r=1$, 那么 $g\in Z(G)$, 所以 $Z(G)\neq\{1\}$, 且同前面一样 G 非单. 若 $p^r>1$, 根据定理 31.3, G 非单. 证毕.

事实上 Burnside p^aq^b 定理给出了 p^aq^b 阶群的更多信息.

(31.5)　　p^aq^b 阶群是可解群.

这里, 一个可解群也就是说存在子群 $G_0,G_1,\ldots,G_r$, 其中

$$1=G_0<G_1<\ldots<G_r=G,$$

使得对每个 $1\leqslant i\leqslant r$,$G_{i-1}\lhd G_i$ 且商群 G_i/G_{i-1} 为素数阶循环群.

我们对 $a+b$ 进行归纳, 并简述 (31.5) 的证明. 若 $a+b\leqslant 1$ 结论很显然, 所以假设 $a+b\geqslant 2$ 且令 G 为一 p^aq^b 阶群. 根据 Burnside 定理 31.4,G 有一个非 $\{1\}$ 非 G 的正规子群 H. H 和商群 G/H 的阶都是素数 p 和 q 的幂次的乘积, 且它们的阶都小于 p^aq^b. 因此根据归纳法, H 和 G/H 都是可解的. 所以存在子群

$$\begin{aligned}1 &= G_0\lhd G_1\lhd\ldots\lhd G_s=H,\\ 1 &= G_s/H\lhd G_{s+1}/H\lhd\ldots\lhd G_r/H=G/H,\end{aligned}$$

其中所有的商群 G_i/G_{i-1} 为素数阶. 那么 $1=G_0\lhd G_1\lhd\ldots\lhd G_r=G$ 说明 G 是可解的.

第 31 章总结

1. 如果 G 有一个大小为 p^r(p 为素数, $r\geqslant 1$) 的共轭类, 那么 G 不是单群.
2. 如果 $|G|=p^aq^b$(p,q 为素数,$a+b\geqslant 2$), 那么 G 不是单群.

第 31 章习题

1. 说明非交换单群没有指数为素数的幂次的交换子群.
2. 证明若 G 是阶数小于 80 的非交换单群, 那么 $|G|=60$.
(提示: 利用习题 13.8.)

第 32 章　表示理论在分子振动中的一个应用

表示理论在物理的很多方面有着广泛的应用. 这些应用的产生都是因为每个物理系统都有一个对称群 G, 再加上与系统有关的某个特定的向量空间就变成了一个 $\mathbb{R}G$-模. 例如, 一个分子的震动是由几个微分方程决定的, 并且这个分子的对称群在这些方程的解空间上有一个作用. 就是这个应用 —— 分子 —— 振动理论是我们在这最后一章中所要关注的. 为了使内容简单易懂, 我们仅仅在经典力学的框架下进行讨论 (量子力学在随后的讨论中可能有所涉及, 但是我们并不研究这个, 如果想研究更多的内容, 参考在参考文献中由 D. S. Schonland[8] 写的书).

对　称　群

令 V 是 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$, 对于任意的 $v, w \in V$, 令 $d(v, w)$ 表示 v 和 w 之间的距离, 换句话说, 如果 $v = (x_1, x_2, ...), w = (y_1, y_2, ...)$, 那么

$$d(v, w) = \sqrt{\left(\sum (x_i - y_i)^2\right)}.$$

V 的一个等距同构是 V 的一个可逆的自同态 ϑ, 使得对于任意的 $v, w \in V$ 有下式成立:

$$d(v\vartheta, w\vartheta) = d(v, w).$$

V 的所有的等距同构组成的集合在复合运算下形成了一个群, 叫做 V 的正交群, 用 $O(V)$ 来表示.

$\mathbb{R}^3$ 的任意一个关于通过原点的坐标轴进行的旋转是等距同构的一个例子, 所以任何关于通过原点的一个平面的反射也是一个等距同构. 自同态 $-1_{\mathbb{R}^3}$(把每个向量 v 映射到了 $-v$) 是另一个等距同构的例子, 它也是正交群 $O(\mathbb{R}^3)$ 中的一个元素. 任何两个旋转的复合也是一个旋转, 并且对于 $O(\mathbb{R}^3)$ 中的每个等距同构 g 来说, g 或者 $-g$ 是一个旋转 (参见习题 32.1). 因此, 正交群 $O(\mathbb{R}^3)$ 中有一个包含所有的旋转的指数为 2 的子群. 同样的结论适用于群 $O(\mathbb{R}^2)$.

如果 Δ 是 V 的一个子集, 其中 V 是 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$, 那么定义 $G(\Delta)$ 是使得 Δ 不变的等距同构组成的集合, 即

$$G(\Delta) = \{g \in O(V) : \Delta g = \Delta\}$$

(其中 $\Delta g = \{vg : v \in \Delta\}$). 那么 $G(\Delta)$ 是 $O(V)$ 的一个子群, 叫做 Δ 的对称群. $G(\Delta)$ 的一个包含 $G(\Delta)$ 中旋转的子群叫做 Δ 的旋转群. Δ 的旋转群在对称群 $G(\Delta)$ 中的指数是 1 或者 2.

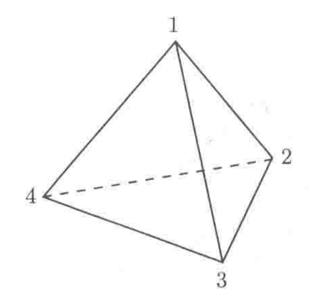
32.1　例子

令 $V = \mathbb{R}^2$, 令 Δ 是一个中心在原点的正 n 边形, 其中 $n \geqslant 3$. 那么很显然有 Δ 的对称群是二面体群 D_{2n}, 即例 1.1(3) 中定义的保持 Δ 不变的 n 个旋转和 n 个反射组成的群.

现在令 $V = \mathbb{R}^3$, 令 Δ 是一个中心在原点的正 n 边形, 其中 $n \geqslant 3$. 这时有 $G(\Delta) = D_{2n} \times C_2$. 产生了一些其他的元素是因为存在一个保持 Δ 的所有的点不变的等距同构, 即关于 Δ 所在平面的反射.

32.2　例子

令 Δ 是一个中心在原点的 $V = \mathbb{R}^3$ 中的正四面体:



这个正四面体的四个角分别记为 1,2,3,4. 我们得到数字 1,2,3,4 之间的每个置换对应着 Δ 中的一个等距同构. 例如, 2-轮换型 (12) 对应着关于包含原点和边 34 的平面的一个反射; 同样地, 每个 2-轮换型对应着一个反射. 因为 S_4 是由 2- 轮换型生成的, 所以 1,2,3,4 之间的 24 个置换每个都对应着一个等距同构.

$\mathbb{R}^3$ 中的非单位的保持 Δ 的所有的点不变的自同态是不存在的, 这是因为 Δ 包含了 3 个线性无关的向量. 因此我们已经找到了所有的等距同构并且有 $G(\Delta) \cong S_4$.

注意到 Δ 的旋转群是同构于 A_4 的, 例如 (12)(34) 对应着关于经过边 12 和 34 的中点的直线旋转 π, (123) 对应着关于经过原点和角 4 的直线旋转 $2\pi/3$.

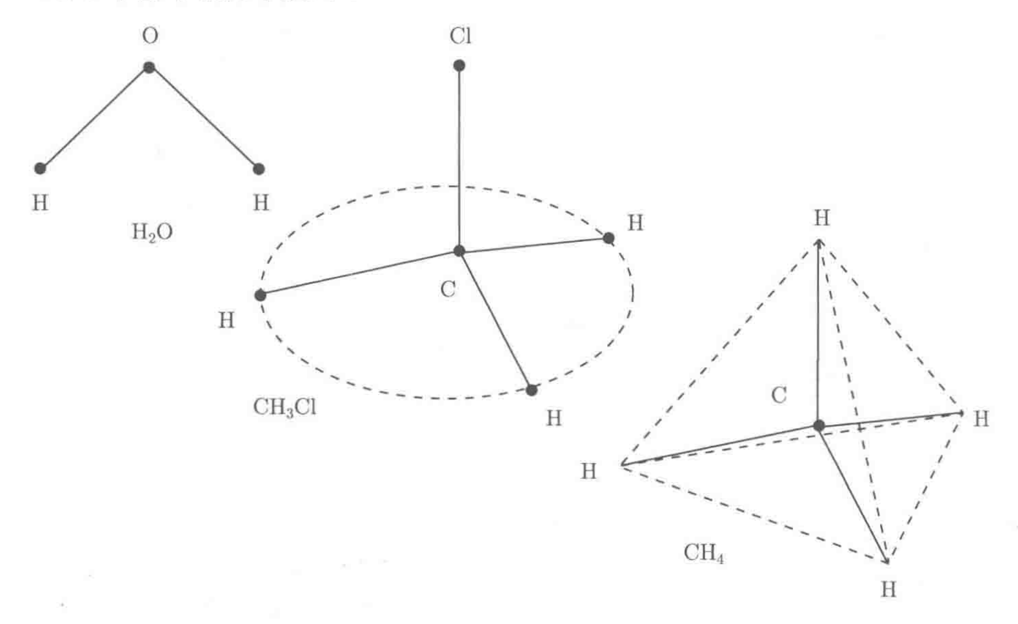
最后, 注意到如果把 Δ 定义为仅仅包含正四面体的 4 个角, 那么群 $G(\Delta)$ 是不变的.

32.3　例子

在这个例子中, 描述分子 H_2O (水), CH_3Cl (一氯甲烷) 和 CH_4 (甲烷) 的对称群. 一个分子的对称群定义为由等距同构组成的群, 这些等距同构不仅仅是保持分

子在空间中的位置不变, 同时也把每个原子映射成相同类型的原子.

这 3 个分子的形状如下:



我们总是假设分子的中心是在 $\mathbb{R}^3$ 的原点位置的.

CH_4 分子在正四面体的 4 个角上有 4 个氢原子, 在正四面体的中心上有一个碳原子. 所以分子 CH_4 的对称群就是正四面体的对称群, 我们已经在例 32.2 中给出. 这个群是同构于 S_4 的, 即在 4 个氢原子之间置换并保持碳原子不动.

至于 CH_3Cl 分子, 有一个关于垂直的坐标轴的一个 3 阶的旋转 a, 和关于包含 C, Cl 与其中一个 H 原子的平面的 3 个反射. 如果 b 表示其中的一个反射, 那么对称群是

$$\{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$$

同构于 S_3, 在 3 个氢原子之间进行置换并保持 C 原子和 Cl 原子不动.

最后, H_2O 分子有两个反射, 一个是关于分子所在平面的反射, 另一个是关于与这个平面垂直的通过 O 原子的平面的反射. 它有一个 2 阶的旋转. 因此, 对称群同构于 $C_2 \times C_2$.

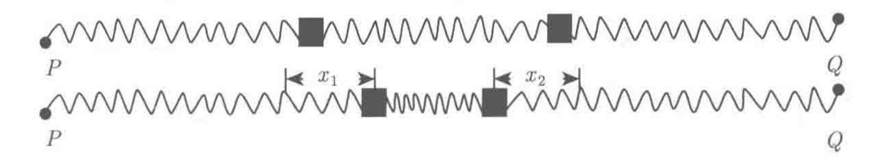
一个物理系统的振动

先举一个例子来为我们陈述一个一般的问题做准备.

32.4 例子

假设有一个在 P 和 Q 两点之间拉伸的弹簧, 我们把它放置在一个光滑的水平

面上, 在这个弹簧的 3 等分点上有两个一样的块 m 固定在上面:



这两个块被轻轻地放置并释放. 我们怎样描述这个系统随后的运动?

为了研究这个问题, 令 x_1 和 x_2 表示两个块在时间 t 处的位移. 从左到右测量 x_1, 并且从右向左测量 x_2, 就像上面图中描述的那样. 令 k 是这个弹簧的弹性系数, 换句话说, 如果弹簧的拉伸长度是 x, 那么回复力是 kx.

弹簧使得左边的块向 P 用力 kx_1, 向 Q 用力 $-k(x_1+x_2)$. 通过对右边的块相同的处理, 得到了系统运动的如下的方程:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1+x_2) = -2kx_1 - kx_2,$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_1+x_2) = -kx_1 - 2kx_2,$$

其中 $\ddot{x}_i$ 表示 x_i 相对于 t 的二阶导数.

这两个是关于两个未知的变量 x_1 和 x_2 的二阶线性微分方程, 所以一般解包含 4 个任意的常数. 我们来陈述一个应用可以更广泛的方法, 这个方法可以帮助我们找到一般解.

记 $x=(x_1,x_2), \ddot{x}=(\ddot{x}_1,\ddot{x}_2), q=k/m$. 那么这个运动方程等价于矩阵方程

(32.5)
$$\ddot{x} = xA, \quad A = \begin{pmatrix} -2q & -q \\ -q & -2q \end{pmatrix}.$$

注意到 A 是对称的. 因此 A 的特征值是实数, 并且 A 有两个线性无关的特征向量. 就是这个性质我们要在当前的例子中加以应用.

在具体找 A 的特征向量之前, 让我们先来看看为什么可以解运动方程 (32.5).

假设 u 是 A 的特征向量, 特征值是 $-\omega^2$. 对于任意的一个常数 β, 令

$$x = \sin(\omega t+\beta)u.$$

那么

$$\ddot{x} = -\omega^2\sin(\omega t+\beta)u = \sin(\omega t+\beta)uA = xA.$$

(其中上一个等式的第二个括号是因为 $uA=-\omega^2 u$) 因此 x 是这个运动方程的一个解. 如果 u_1,u_2 是 A 的线性无关的特征向量, 相应的特征值分别是 $-\omega_1^2, -\omega_2^2$, 那么

$$\alpha_1\sin(\omega_1 t+\beta_1)u_1 + \alpha_2\sin(\omega_2 t+\beta_2)u_2$$

是运动方程的一个解, 这个解包含了 4 个任意的常数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, 所以它是一般解.

现在应用这个思想来解决问题. 对于在 (32.5) 中给出的矩阵, 特征值是 $-3q$ 和 $-q$, 相应的特征向量是 (1,1) 和 $(1, -1)$. 因此, 运动方程 (32.5) 的一般解是

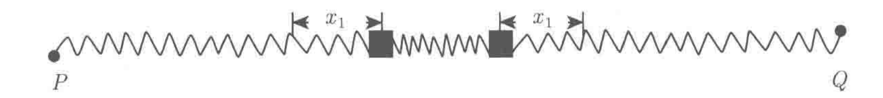
$$\alpha_1 \sin(\sqrt{3q}t + \beta_1)(1,1) + \alpha_2 \sin(\sqrt{q}t + \beta_2)(1,-1).$$

仅仅包含 A 的一个特征向量的解叫做简正振动模. 它们如下:

模式 1:

$$\sin(\sqrt{3q}t + \beta_1)(1,1),$$

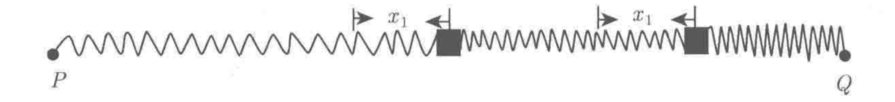
其中 $x_1 = x_2 = \sin(\sqrt{3q}t + \beta_1)$, 振动是



模式 2:

$$\sin(\sqrt{q}t + \beta_2)(1,-1),$$

其中 $x_1 = -x_2 = \sin(\sqrt{q}t + \beta_2)$, 振动是



一般的分子振动问题

假设有一个分子, 这个分子包含了 n 个原子, 这些原子在内力作用下振动. 在每个原子的平衡位置上, 建立一个 3 维的坐标系, 通过这个坐标系来测量原子的位移变化. 因此, 在一个给定的时间状态下的分子的状态是由一个 $3n$ 维的向量空间 $\mathbb{R}^{3n}$ 中的向量来描述的. 假定内部力是位移的线性函数. 那么得到, 应用牛顿第二运动定律, 方程可以表示为如下形式:

(32.6)
$$\ddot{x} = xA$$

(与 (32.5) 相比较). 这里 x 是 $\mathbb{R}^{3n}$ 中的一个行向量, 这个向量表示了所有的原子的位移变化, 并且 A 是一个元素为实数的 $3n \times 3n$ 阶的矩阵, 这个矩阵是由内力决定的.

现在假设在每个原子的位置上我们建立的是满足右手定则的 3 维坐标系. 从物理的角度来看, 可以证明在这个特殊的情况下矩阵 A 是对称的. 特别地, A 的特征值都是实数, 并且 A 有 $3n$ 个线性无关的特征向量. 现在, 如果变换坐标系, 那么

就相当于把矩阵 A 变为一个与 A 共轭的矩阵. 因此, 有如下命题, 对于一般的情况, 我们并不需要选择的坐标系是通过右手定则确定的.

32.7　命题

A 的所有的特征值都是实数, 并且 A 有 $3n$ 个线性无关的特征向量.

为了解运动方程 (32.6), 我们必须找到系统的简正模, 这将要在下面定义.

32.8　定义

分子的简正振动模是下面的两种形式之一的 $\mathbb{R}^{3n}$ 中的一个向量:

(1)

$$\sin(\omega t+\beta)u \quad (\beta \text{ 是常数}),$$

其中 $-\omega^2$ 是 A 的一个非零的特征值, u 是相应的特征向量;

(2)

$$(t+\beta)u \quad (\beta \text{ 是常数}),$$

其中 u 是 A 的对应特征值 0 的特征向量.

32.9　命题

每个简正振动模是运动方程 (32.6) 的一个解, 并且对于这个解来说, 所有的原子以相同的频率振动. 振动方程的一般解是简正振动模的一个线性组合.

证明　如果 $uA=-\omega^2 A, x=\sin(\omega t+\beta)u$, 那么

$$\ddot{x}=-\omega^2\sin(\omega t+\beta)u=\sin(\omega t+\beta)uA=xA.$$

如果 $uA=0, x=(t+\beta)u$, 那么

$$\ddot{x}=0=(t+\beta)uA=xA.$$

这就证明了简正振动模是运动方程 (32.6) 的一个解并且所有的原子在同一个简正模中以相同的频率 (即 ω 或 0) 振动.

注意到 A 不能有负的特征值①; 如果 λ 是负的特征值, 相应的特征向量是 u, 那么 $x=e^{\sqrt{\lambda}t}u$ 是运动方程的一个解, 但是这个解是没有意义的. 因此由命题 32.7 我们知道, 存在 $3n$ 个线性无关的简正模. 因为每个简正模包含一个任意的常数, 所以简正模的一般的线性组合包含 $6n$ 个任意的常数, 所以它是运动方程 (32.6) 的一般解 (因为 (32.6) 是含有 $3n$ 个未知数的二阶微分方程). 证毕.

① 原书为 "A can have no strictly positive eigenvalue", 译者修正为 "A 不能有负的特征值".

命题 32.9 把解运动方程的问题归结到了找到 $3n \times 3n$ 阶的矩阵 A 的特征值和特征向量的问题上来. 然而, 如果直接计算, 将会非常繁琐, 而且对于一个给定的分子来说, 写出它的矩阵 A 就是一个头疼的问题!

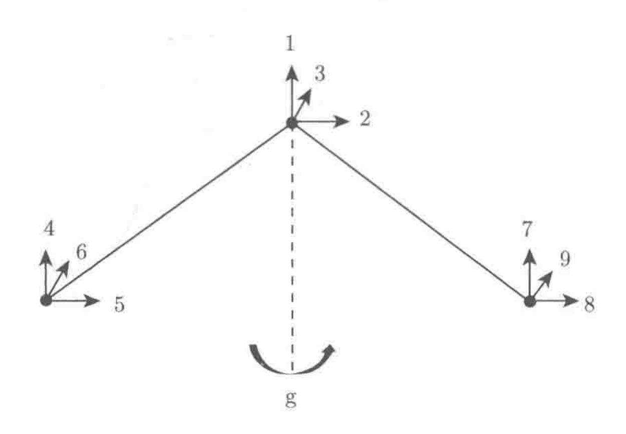
分子的对称群和它的表示理论可以用来大大简化 A 的特征向量的求解, 下面将要陈述我们的方法.

对称群的应用

我们接着上面继续讨论. 令 G 是上面问题中的分子的对称群. 因为 G 在原子之间进行置换, 每个 G 中的元素相当于由位移向量组成的空间 $\mathbb{R}^{3n}$ 中的一个自同态. 因此, $\mathbb{R}^{3n}$ 是一个 $\mathbb{R}G$-模.

32.10 例子

令 g 是 H_2O 水分子中的一个 2 阶的旋转:



如图, 在每个原子的最初始的位置上建立坐标系, 对于 $1 \leqslant i \leqslant 9$, 令 v_i 表示沿着坐标系 i 的一个单位向量. 那么 g 保持 v_1 不动, 把 v_2 和 v_3 变成它们的相反数, 交换 v_4 和 v_7, 交换 v_5 和 $-v_8$, 交换 v_6 和 $-v_9$. 因此 g 在 $\mathbb{R}^9$ 上的作用如下:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)g = (x_1, -x_2, -x_3, x_7, -x_8, -x_9, x_4, -x_5, -x_6).$$

现在回到一般的问题中来. 运动方程是 $\ddot{x} = xA$, 我们尝试着找到 A 的所有的特征向量. 由定义我们知道 A 的对应着特征值 λ 的特征空间是

$$\{x \in \mathbb{R}^{3n} : xA = \lambda x\}.$$

现在可以得到一个有助于计算分子的对称群 G 的一个重要的命题. 事实上, 这个命题告诉我们函数 $x \mapsto xA (x \in \mathbb{R}^{3n})$ 是从 $\mathbb{R}^{3n}$ 到它本身的一个 $\mathbb{R}G$-同态.

32.11 命题

对于所有的 $g \in G, x \in \mathbb{R}^{3n}$ 有

$$(xg)A = (xA)g,$$

并且 A 的特征空间是 $\mathbb{R}^{3n}$ 的一个 $\mathbb{R}G$-子模.

证明 令 $-\omega^2$ 是 A 的一个非零的特征值, 令 v 是相应的特征向量. 那么当分子在频率是 ω 的一般模型中振动时, v 给出了原子相对于平衡位置的位移的方向和大小. 对于所有的 $g \in G$, vg 也给出了分子在频率 ω 的简正模中原子相对于平衡位置的位移的方向和大小, 这是因为原子的相对形状不因为 g 的作用而改变. 因此 vg 也是 A 的一个特征向量, 对应的特征值是 $-\omega^2$. 这说明 $-\omega^2$ 的特征空间是 $\mathbb{R}^{3n}$ 的一个 $\mathbb{R}G$-子模. 对于特征值 0 的特征空间, 应用相似的办法.

选择 $\mathbb{R}^{3n}$ 的一组基, 这组基是包含 A 的特征向量 (见命题 32.7). 令 $g \in G$, 对于所有的基中的向量 v 来说, 存在某个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $vA = \lambda v$ 成立, 并且有

$$(vg)A = \lambda(vg) = (\lambda v)g = (vA)g.$$

因此对于所有的 $x \in \mathbb{R}^{3n}$ 来说有 $(xg)A = (xA)g$. 证毕.

现在应用表示理论把 $\mathbb{R}G$-模 $\mathbb{R}^{3n}$ 表示为不可约的 $\mathbb{R}G$-子模的直和, 从而确定 A 的特征空间和分子的简正模.

我们可以应用特征标理论来看看哪些不可约的 $\mathbb{R}G$-模是包含于 $\mathbb{R}^{3n}$. 如果 χ 是这样的一个不可约 $\mathbb{R}G$-模的特征标, 那么元素

$$\sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g$$

把 $\mathbb{R}^{3n}$ 映射到了那些特征标为 χ 的 $\mathbb{R}^{3n}$ 的不可约的 $\mathbb{R}G$-子模的和上 (见 (14.27))(这个方法有时候需要进一步分析, 因为 $\mathbb{R}G$-模 $\mathbb{R}^{3n}$ 的特征标有可能含有一个在 $\mathbb{R}$ 上不可以实现的不可约特征标, 但是在实际中, 这种情况并不常见).

32.12 定义

假设 χ 是一个不可约 $\mathbb{R}G$-模的特征标. 令 V_χ 表示那些特征标为 χ 的 $\mathbb{R}^{3n}$ 的不可约的 $\mathbb{R}G$-子模的和. 把 V_χ 叫做 $\mathbb{R}^{3n}$ 的一个齐次分量.

找 A 的特征空间的问题就简化成了下面的这个命题.

32.13 命题

$\mathbb{R}^{3n}$ 的每个齐次分量 V_χ 是 A-不变的, 即对于所有的 $x \in V_\chi$, 有

$$xA \in V_\chi.$$

证明 由 Maschke 定理我们知道存在 $\mathbb{R}G$-模 W 使得 $\mathbb{R}^{3n} = V_\chi \oplus W$, 并且 W 的 $\mathbb{R}G$-子模中不存在特征标为 χ 的. 函数

$$\varepsilon : v + w \mapsto w \quad (v \in V_\chi, w \in W)$$

是一个 $\mathbb{R}G$-同态. 因此, 由命题 32.11 我们知道函数

$$x \mapsto (xA)\varepsilon \quad (x \in V_\chi)$$

是一个从 V_χ 到 W 的 $\mathbb{R}G$-同态. 由命题 11.3 我们知道这个函数是零函数, 所以对于所有的 $x \in V_\chi$, 有 $xA \in V_\chi$ (虽然命题 11.3 陈述的是在 $\mathbb{C}G$-模下的结论, 但是它的结论在 $\mathbb{R}G$-模下仍然成立 —— 与习题 23.8 相比较). 证毕.

32.14 推论

如果 V_χ 是一个不可约的 $\mathbb{R}G$-模, 那么 V_χ 中所有的非零的向量是 A 的特征向量.

证明(与 Schur 引理的证明相比较) 因为 V_χ 是 A-不变的, 可以选择 $v \in V_\chi$ 使得 v 是 A 的一个特征向量, 相应的特征值是 λ. 那么 λ 的特征空间与 V_χ 的交是 V_χ 的一个非零的 $\mathbb{R}G$-子模, 所以就是 V_χ 本身. 证毕.

现在来总结一下, 给定一个分子, 找简正振动模的步骤.

32.15 总结

(1) 在分子的 n 个原子上建立三维坐标系, 得到 $\mathbb{R}^{3n}$.

(2) 计算分子的对称群 G. 那么 $\mathbb{R}^{3n}$ 是一个 $\mathbb{R}G$-模.

(3) 计算 $\mathbb{R}G$-模 $\mathbb{R}^{3n}$ 的特征标 χ, 并把 χ 表示为 G 的不可约的特征标的一个线性组合.

(4) 把 $\mathbb{R}^{3n}$ 表示为齐次分量的一个直和. 这个可以利用把 $\sum\limits_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g$ 作用在 $\mathbb{R}^{3n}$ 上来实现, 其中 χ_i 是出现在 χ 中的不可约的特征标, 或者用一些其他的方法.

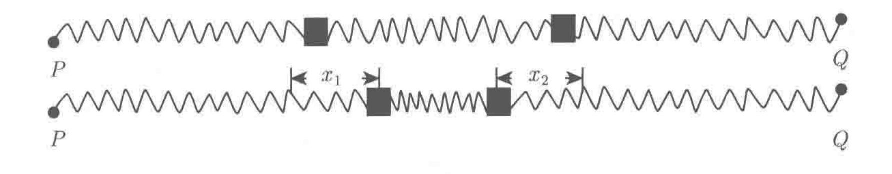
(5) 反过来, 对于每个 $\mathbb{R}^{3n}$ 的齐次分量 V_{χ_i} 来说, 找 V_{χ_i} 中的 A 的特征向量 (见命题 32.13). 如果 V_{χ_i} 是不可约的, 那么就结束了 (见推论 32.14); 如果 V_{χ_i} 是可约的, 那么参见下面的注 32.19 或者习题 32.7 进行进一步的分析.

(6) 如果 v 是 A 的一个特征向量, 相应的特征值是 $-\omega^2$. 那么 $\sin(\omega t + \beta)v$ 和 $(t + \beta)v$ $(\omega = 0)$ 是一个简正模, 其中 β 是一个任意的常数. 通常情况下, 为了确定频率 ω, 需要知道运动方程.

这个方法是有效的, 在本章之后的部分将会用几个例子来具体说明这个方法怎样使用.

32.16 例子

首先回到例 32.4 中来, 有一个弹簧和两个振动块:



这个系统的对称群是 $G=\langle g : a^2=1\rangle$, 其中 g 是关于 PQ 的中点的反射. 位移向量 (x_1,x_2) 构成了一个 $\mathbb{R}G$-模 $\mathbb{R}^2$.

因为 $(x_1,x_2)g=(x_2,x_1),\mathbb{R}^2$ 的 $\mathbb{R}G$-子模是 $sp(u_1)$ 和 $sp(u_2)$, 其中

$$u_1=(1,1),\quad u_2=(1,-1).$$

所以这个系统的简正模是

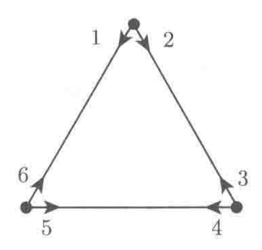
$$\sin(\omega_1 t+\beta_1)(1,1),\quad \sin(\omega_2 t+\beta_2)(1,-1),$$

其中 β_1,β_2 是常数, ω_1,ω_2 是频率. 这与例 32.4 的结论相符合.

注意到我们仅仅使用对称群就得到了简正振动模 (但不是它们的频率).

32.17 例子

考虑一个假设的三原子分子, 其中三个等价的原子在正三角形的三个角上. 为了简化, 仅仅考虑这个分子在平面上的振动, 所以对于每个原子, 建立两个位移坐标. 沿着三角形的边建立坐标轴, 这是因为这样建立坐标轴使运算变得简单:



因此分子的位置是由一个 $\mathbb{R}^6$ 中的向量 $(x_1,...,x_6)$ 决定的, 其中 x_i 是沿着坐标轴 $i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 的位移.

这个分子的对称群 (在 2 维情况下) 是二面体群 D_6, 由一个 3 阶的旋转 a 和一个反射 b 生成 (见习题 32.1). 很容易计算出 D_6 的每个元素在 $\mathbb{R}^6$ 上的作用. 例如, 如果 b 是固定最上面的原子的反射, 那么

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\,b=(x_2,x_1,x_6,x_5,x_4,x_3).$$

我们想把 $\mathbb{R}D_6$-模 $\mathbb{R}^6$ 表示成不可约的 $\mathbb{R}D_6$-模的直和的形式. 为了表达这个, 首先计算这个模的特征标 χ. 因为旋转 a 不固定任何原子, 所以 $\chi(a) = 0$. 并且从上面给出的 b 的作用, 得到 $\chi(b) = 0$. 因此 χ 的值如下:

	1	a	b
χ	6	0	0

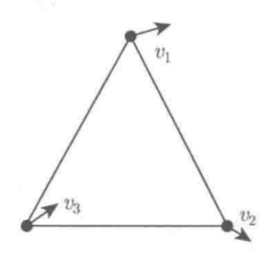
由 18.3 我们知道 D_6 的特征标表是

	1	a	b
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

因此 $\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$.

因此我们设法把 $\mathbb{R}^6$ 表示成 $\mathbb{R}D_6$-子模的直和形式, 相应的子模的特征标分别为 χ_1, χ_2, χ_3 和 χ_3.

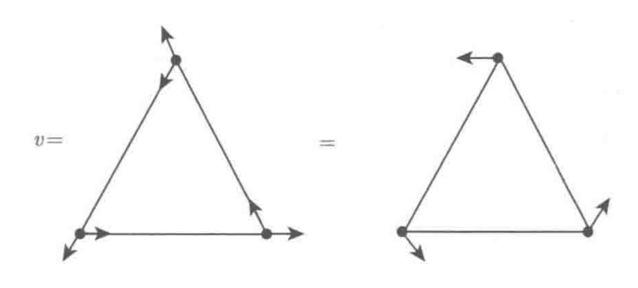
至于符号的问题, 如果 v_1, v_2, v_3 是三个原子的 2 维位移向量, 那么用下面的图来表示位移向量 $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^6$:



先计算模式为 $(t + \beta)v$ 的简正模, 对应着 A 的特征值为 0 的特征空间. 对于每个分子来说, 它们包含了旋转和平移模式.

旋转模式

在这个模式中, 分子关于中心以恒定的角速度旋转. 这个模式是由 $(t + \beta)v$ 给出的, 其中 $v = (1, -1, 1, -1, 1, -1)$, 用图来描述就是:



把 $sp(v)$ 叫做 $\mathbb{R}^6$ 的旋转子模. 如果 $\chi_{\mathbb{R}}$ 是 $sp(v)$ 的特征标, 那么

$$\chi_{\mathbb{R}}(1) = 1, \quad \chi_{\mathbb{R}}(a) = 1, \quad \chi_{\mathbb{R}}(b) = -1,$$

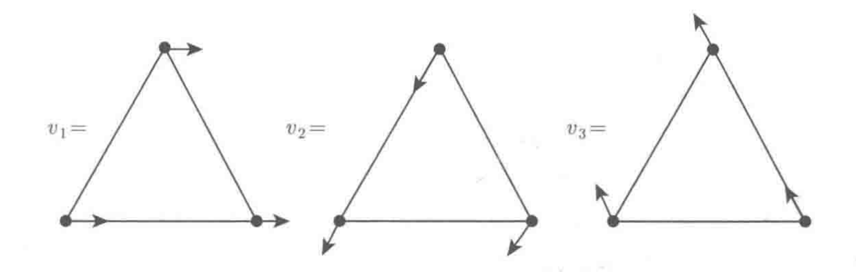
所以 $\chi_{\mathbb{R}} = \chi_2$. 事实上, 有 $sp(v) = \mathbb{R}^6\varepsilon_2$, 其中

$$\varepsilon_2 = \sum_{g \in D_6} \chi_2(g^{-1})g = 1 + a + a^2 - b - ab - a^2b$$

(与 (14.27) 相比较).

平移模式

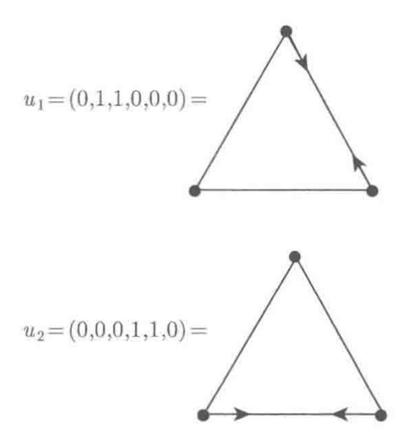
在这个模式中, 所有的原子均以相同的常方向, 相同的常速度运动. 这些模式的形式是 $(t+\beta)v$, 其中 v 是 v_1, v_2, v_3 的张成的空间中的一个向量, 至于 v_1, v_2, v_3 是由下图给出:

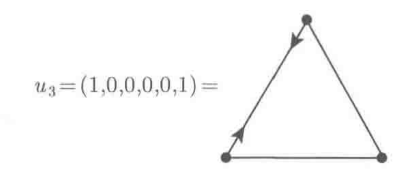


(因此 $v_1 = (-1, 1, 0, -1, 1, 0), v_2 = (1, 0, -1, 1, 0, -1), v_3 = (0, -1, 1, 0, -1, 1)$).

因为 $v_1 + v_2 + v_3 = 0$, 子空间 $sp(v_1, v_2, v_3)$ 的维数是 2. 很显然有 $sp(v_1, v_2, v_3)$ 是 $\mathbb{R}^6$ 的一个 $\mathbb{R}D_6$-子模, 它叫做平移子模, 并且它不包含旋转子模. 因此, 这个平移子模的特征标是 $\chi - \chi_2 = \chi_1 + 2\chi_3$ 的一部分, 所以只能是 χ_3.

振动模式





余下的简正模对应着矩阵 A 的非零特征值的特征空间, 叫做振动模式. 这些特征空间的和构成了 $\mathbb{R}^6$ 的一个 $\mathbb{R}D_6$-子模 $\mathbb{R}^6_{vib}$ (见命题 32.11), 相应的特征标是 χ_{vib}, 其中

$$\chi_{vib} = \chi - (\chi_2 + \chi_3) = \chi_1 + \chi_3.$$

特别地, $\mathbb{R}^6_{vib}$ 的维数是 3. 因为 $\mathbb{R}^6_{vib}$ 中没有模式的平移分量. 如果 $w \in \mathbb{R}^6_{vib}$, 那么 w 在每个方向的和量是 0; 又因为 $\mathbb{R}^6_{vib}$ 坐标中的每个向量关于中心的总和是 0, 所以 $\mathbb{R}^6_{vib}$ 不含有旋转子模. 这些条件限制了 $\mathbb{R}^6_{vib}$ 中的向量的坐标之间存在 3 个线性无关的方程, 又因为 $\mathbb{R}^6_{vib}$ 的维数是 3, 所以满足这些方程的 $\mathbb{R}^6$ 中的向量落在 $\mathbb{R}^6_{vib}$ 中. 因此 $\mathbb{R}^6_{vib}$ 的一组基是 $u_1$①, u_2, u_3, 如上图.

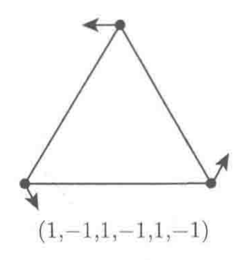
很显然 $sp(u_1 + u_2 + u_3)$ 是 $\mathbb{R}^6_{vib}$ 的一个 $\mathbb{R}D_6$-子模, 相应的特征标是 χ_1. 由 $u_1 + u_2 + u_3$ 给出的振动模型有时也叫做扩张-收缩模式 (这个名字的由来可以参考下面 (32.18(3)) 中的图).

最后, 因为 D_6 使得向量 u_1, u_2, u_3 之间置换, 很容易看到 $sp(u_1 - u_2, u_1 - u_3)$ 是 $\mathbb{R}^6_{vib}$ 的一个 $\mathbb{R}D_6$-子模, 它的特征标是 χ_3, 并且它给出了矩阵 A 的最后的特征空间.

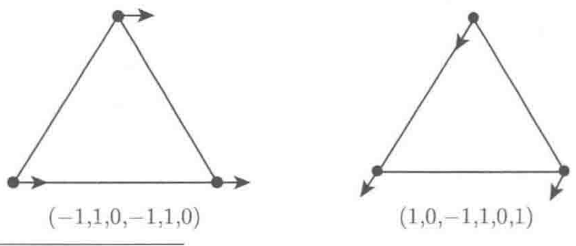
至此, 已经计算完了简正模, 我们把结论总结如下:

(32.18)

(1) 旋转模式:

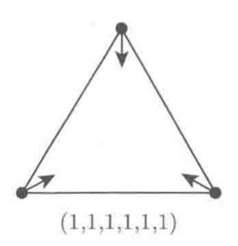


(2) 平移模式: 下面两个向量的线性组合:

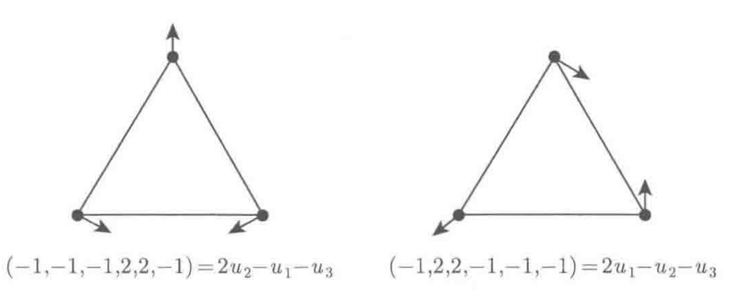


① 原书图中第一个三角形旁边为“$u_3 = (0, 1, 1, 0, 0, 0)$”, 译者修正为“$u_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 0)$”.

(3) 振动模式 (扩张-收缩模式):

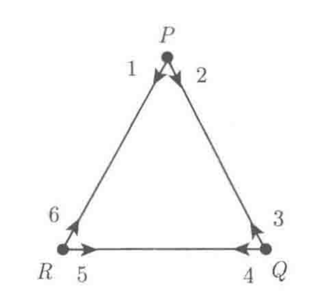


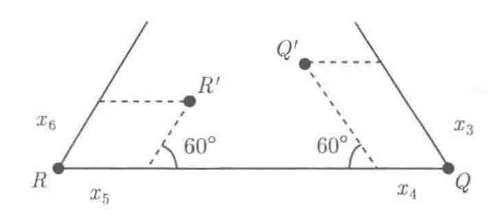
(4) 振动模式: 下面两个向量的线性组合:



(我们在 (4) 中选择 $2u_2 - u_1 - u_3, 2u_1 - u_2 - u_3$ 作为振动模式的一组基仅仅因为这样比选择 $u_1 - u_2, u_1 - u_3$ 从图上来说看着简单.)

强调一下, 我们是在没有利用运动方程的具体条件的情况下找到了振动的简正模. 为了验证这个结果, 现在计算运动方程.





令 m 是每个原子的块, 假设两个原子之间的力的大小是 k 乘上它们之间的距离. 对于一个一般的位移 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ 来说, 用 P', Q', R' 来表示原子的新位置. 从图上来看, QR 和 $Q'R'$ 之间的距离长度是

$$(x_4 + x_5) + \frac{1}{2}(x_3 + x_6)$$

(总是假设 $x_1, ..., x_6$ 与原子之间的距离相比是小的, 所以可以忽略二阶项).

类似地, 有

$$PR - P'R' = (x_1 + x_6) + \frac{1}{2}(x_2 + x_5),$$

$$PQ - P'Q' = (x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(x_1 + x_4).$$

因此分子在 P 位置上的力在第一个坐标轴方向上的分量是

$$-k(PR - P'R') = -k(x_1 + x_6) - \frac{1}{2}k(x_2 + x_5).$$

因此有

$$\frac{m}{k}\ddot{x}_1 = -(x_1 + x_6) - \frac{1}{2}(x_2 + x_5).$$

类似地, 有

$$\frac{m}{k}\ddot{x}_2 = -(x_2 + x_3) - \frac{1}{2}(x_1 + x_4),$$

同样可以得到关于 $\ddot{x}_3, ..., \ddot{x}_6$ 的类似的式子. 那么方程 $\ddot{x} = xA$ 中的矩阵 A 由如下给出:

$$A = \frac{-k}{m}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

建议读者验证一下我们在 (32.18) 中给出的向量确实是 A 的特征向量.

32.19 注记

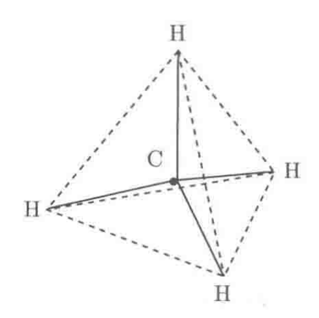
在例 32.17 中, $\mathbb{R}G$-模 $\mathbb{R}^6$ 的特征标 χ 是由下式给出:

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

χ_1 和 χ_2 的齐次分量中的所有的非零向量给出了简正模, 这是因为这些齐次分量是不可约的 (见推论 32.14). χ_3 的齐次分量 V_{χ_3} 是可约的, 但是我们能够把它写成特征向量的两个子空间的和 (那些出现在 (32.18)(2) 和 (4) 中的), 这是因为 $V_{\chi_3}\bigcap\mathbb{R}^6_{vib}$ 是 V_{χ_3} 的一个 A-不变的 $\mathbb{R}G$-子模, 并且它不等于 $\{0\}$ 和 V_{χ_3} 本身. 这为我们处理可约的齐次分量提供了一种方法. 在下面的例子中, 情况会更加复杂一点.

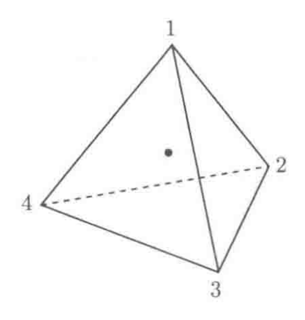
32.20　例子

对于甲烷分子 CH_4, 我们分析它的简正模.



我们已经在例 32.2 中确定了这个分子的对称群 G, 并且我们知道 G 是同构于 S_4 的. 把这个正四面体的四个角标记为 1,2,3,4, 如下图表示, 并认为 G 就是 S_4. 因此, 例如, 关于经过 1 的垂直的轴的旋转是

$$1, (234), (243).$$



为了更好地研究这个甲烷分子的对称性, 在每个氢原子的位置上, 建立沿着正四面体的边的位移坐标轴. 令 v_{12}, v_{13}, v_{14} 分别是在角 1 的位置沿着边 12,13,14 的单位向量; 同样地, 令 v_{21}, v_{23}, v_{24} 分别是在角 2 的位置沿着边 21,23,24 的单位向量, 等等, 这样给出了 12 个向量 v_{ij}.

现在介绍一种新的思想, 让 w_1, w_2, w_3, w_4 分别表示沿着中心的碳原子指向角 i 方向的 4 个单位向量, 其中 $1 \leqslant i \leqslant 4$. 因为 $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0$, 所以这四个向量扩张成了一个 3 维的空间.

令 V 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 基为

$$v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{21}, v_{23}, v_{24}, v_{31}, v_{32}, v_{34}, v_{41}, v_{42}, v_{43},$$

令 W 是由 w_1, w_2, w_3, w_4 张成的 $\mathbb{R}$ 上的向量空间. 那么 $V \cong \mathbb{R}^{12}, W \cong \mathbb{R}^3$, 并且 V 和 W 都是 $\mathbb{R}G$-模. 我们的主要目标是找 $\mathbb{R}^{15} = V \oplus W$ 的 $\mathbb{R}G$-子模.

G 在 V 上的作用很容易描述出来, 对于 $g \in G, i, j$ 有

$$v_{ij}g = v_{ig,jg}.$$

因此 G 使得 V 的 12 个基向量在它们之间发生置换, 并且很容易求得 V 的特征标 χ:

	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ	12	2	0	0	0

例如, (12) 是仅仅保持基向量 v_{34} 和 v_{43} 不动的元素; 所有的基向量经过 (123) 的作用后都发生了改变, 等等.

G 在 W 上的作用为, 对于 $g \in G$, 有 $w_i g = w_{ig}$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$.

回忆前面已经得到的 $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0$, 所以很容易求得 W 的特征标 ϕ:

	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
ϕ	3	1	0	-1	-1

由 18.1 我们知道 S_4 的特征标表如下给出:

	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

我们看出

$$\chi = \chi_1 + \chi_3 + 2\chi_4 + \chi_5,$$

$$\phi = \chi_4.$$

把元素

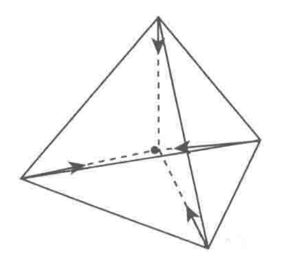
$$\sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g \ (i = 1, 3, 5, 4)$$

作用在 $\mathbb{R}^{15}$ 上, 可以得到特征标分别为 $\chi_1, \chi_3, \chi_5, 3\chi_4$ 的 $\mathbb{R}G$-子模 (见 (14.27)).

特征标为 χ_1 的 $\mathbb{R}G$-子模 W_1 是由

$$\sum_{i,j} v_{ij}$$

张成的, 这给出了扩张-收缩简正模:



接下来给出特征标为 χ_5 的 $\mathbb{R}G$-子模 W_5. 令

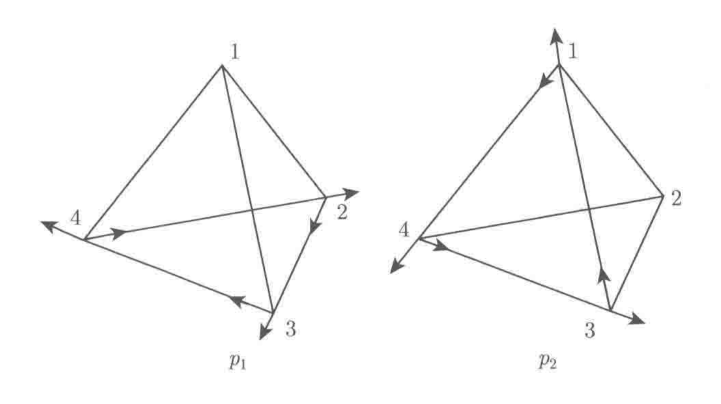
$$p_1 = (v_{23} - v_{32}) + (v_{34} - v_{43}) + (v_{42} - v_{24}),$$

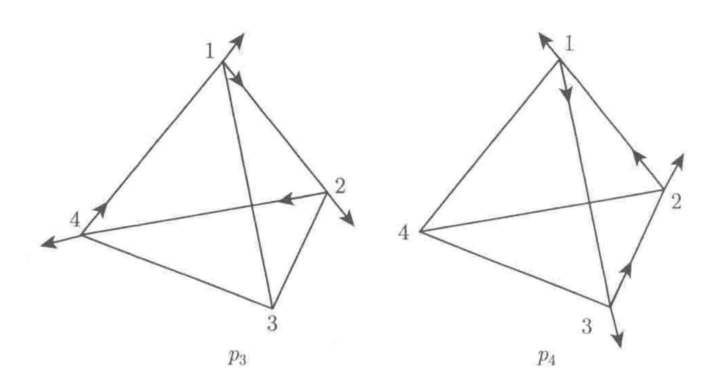
$$p_2 = (v_{31} - v_{13}) + (v_{14} - v_{41}) + (v_{43} - v_{34}),$$

$$p_3 = (v_{12} - v_{21}) + (v_{41} - v_{14}) + (v_{24} - v_{42}),$$

$$p_4 = (v_{21} - v_{12}) + (v_{13} - v_{31}) + (v_{32} - v_{23}).$$

向量 p_i 给出了绕着经过角 i 和正四面体的中心的轴的一个旋转.





p_3　　p_4

从图中很容易看到对于所有的 $1 \leqslant i \leqslant 4, g \in G$, 存在 j 使得 $p_i g = \pm p_j$. 因此, 如果令 $W_5 = sp(p_1, p_2, p_3, p_4)$, 那么 W_5 是 V 的一个 $\mathbb{R}G$-子模. 现在有 $p_1+p_2+p_3+p_4 = 0$, 所以 W_5 的维数是 3. 经计算, W_5 的特征标是 χ_5. $\mathbb{R}G$-模 W_5 是一个旋转子模 (例如, 可以把 p_4 的图和例 32.17 中的旋转向量 v 的图相比较).

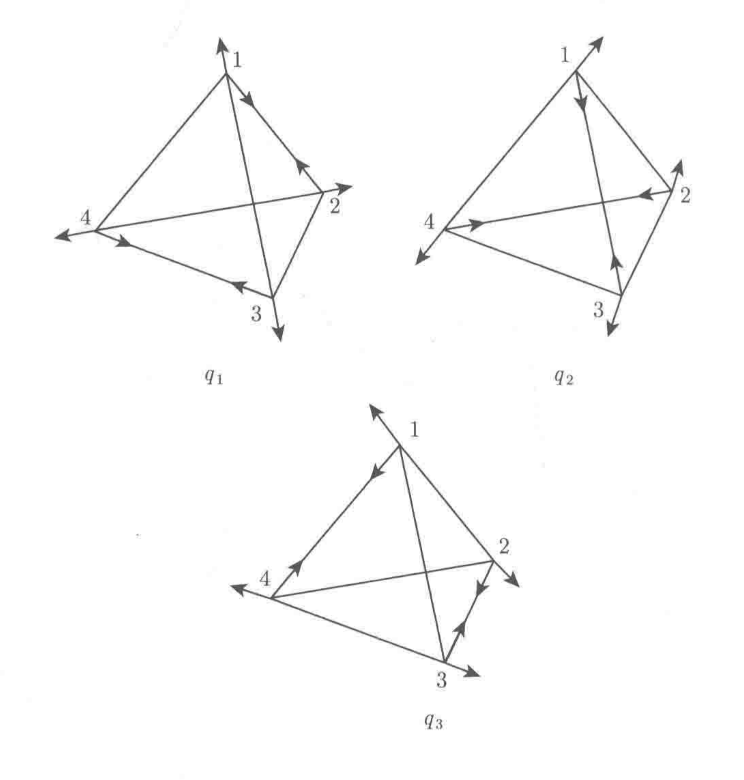
现在构造特征标为 χ_3 的 V 的 $\mathbb{R}G$-子模 W_3. 令

$$q_1 = (v_{12} + v_{21}) + (v_{34} + v_{43}) - (v_{13} + v_{31}) - (v_{24} + v_{42}),$$

$$q_2 = (v_{13} + v_{31}) + (v_{24} + v_{42}) - (v_{14} + v_{41}) - (v_{23} + v_{32}),$$

$$q_3 = (v_{14} + v_{41}) + (v_{23} + v_{32}) - (v_{12} + v_{21}) - (v_{34} + v_{43})$$

(每个 q_i 对应着一个“一对相对边”).



q_1　　q_2

q_3

对于所有的 $1 \leqslant i \leqslant 4, g \in G$ 来说, 存在 j 使得 $q_i g = \pm q_j$. 令 $W_3 = sp(q_1, q_2, q_3)$, 那么 W_3 是 V 的一个 $\mathbb{R}G$-子模. 因为 $q_1 + q_2 + q_3 = 0$, 所以 W_3 的维数是 2, 它的特征标是 χ_3.

由推论 32.14 我们知道, 在已经找到的 $\mathbb{R}G$-子模 W_1, W_3, W_5 中, 所有的非零向量都是 A 的特征向量.

现在考虑 $\mathbb{R}^{15}$ 的齐次分量 $(V \oplus W)_{\chi_4}$. 如下定义向量 r_1, r_2, r_3, r_4:

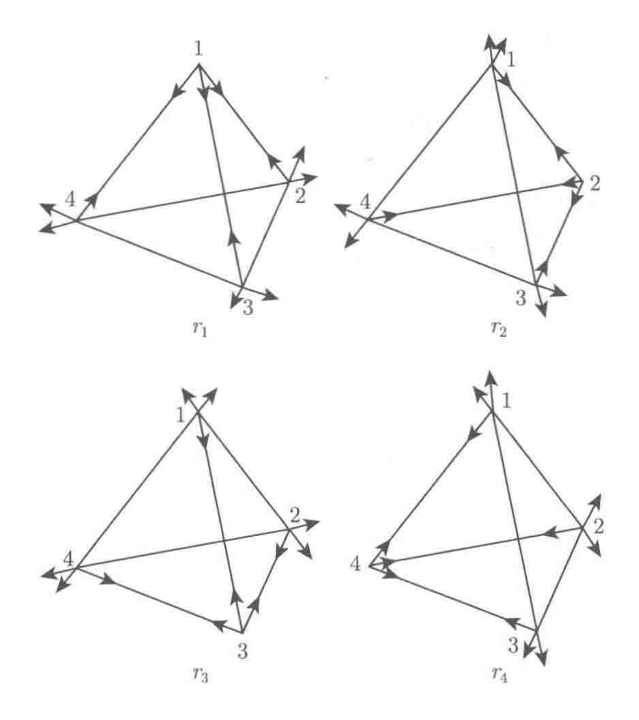
$$r_1 = (v_{12} + v_{21}) + (v_{13} + v_{31}) + (v_{14} + v_{41}) - (v_{23} + v_{32}) - (v_{24} + v_{42}) - (v_{34} + v_{43}),$$

$$r_2 = (v_{12} + v_{21}) + (v_{23} + v_{32}) + (v_{24} + v_{42}) - (v_{13} + v_{31}) - (v_{14} + v_{41}) - (v_{34} + v_{43}),$$

$$r_3 = (v_{13} + v_{31}) + (v_{23} + v_{32}) + (v_{34} + v_{43}) - (v_{12} + v_{21}) - (v_{14} + v_{41}) - (v_{24} + v_{42}),$$

$$r_4 = (v_{14} + v_{41}) + (v_{24} + v_{42}) + (v_{34} + v_{43}) - (v_{13} + v_{31}) - (v_{12} + v_{21}) - (v_{23} + v_{32})$$

(向量 r_i 与角 i 相对应).



对于所有的 $1 \leqslant i \leqslant 4, g \in G$, 有 $r_i g = r_{ig}$. 因此 G 使得向量 r_1, r_2, r_3, r_4 在它们之间发生置换. 注意到 $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$, 所以令 $W_4 = sp(r_1, r_2, r_3, r_4)$, 那么 W_4 是 V 的一个 3 维的 $\mathbb{R}G$-子模, 它的特征标是 χ_4(见命题 13.24).

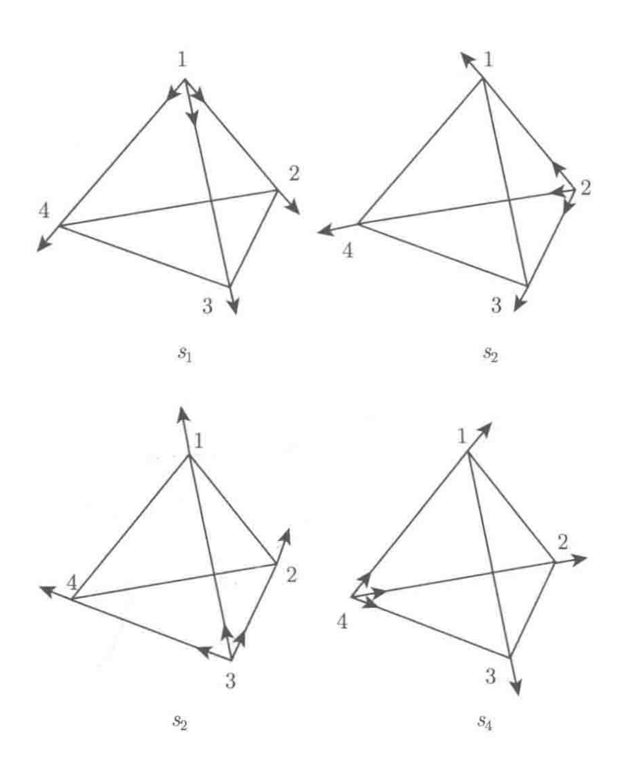
下面定义向量 s_1, s_2, s_3, s_4:

$$s_1 = (v_{12} + v_{13} + v_{14}) - (v_{21} + v_{31} + v_{41}),$$

$$s_2 = (v_{21} + v_{23} + v_{24}) - (v_{12} + v_{32} + v_{42}),$$

$$s_3 = (v_{31} + v_{32} + v_{34}) - (v_{13} + v_{23} + v_{43}),$$

$$s_4 = (v_{41} + v_{42} + v_{43}) - (v_{14} + v_{24} + v_{34}).$$



s_1 s_2

s_2 s_4

对于所有的 $1 \leqslant i \leqslant 4, g \in G$, 有

$$s_i g = s_{ig},$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0,$$

所以令 $W_4' = sp(s_1, s_2, s_3, s_4)$, 那么 W_4' 是 V 的一个 3 维的 $\mathbb{R}G$-子模, 它的特征标是 χ_4.

由于 w_1, w_2, w_3, w_4 扩张成了 W, 并且对于所有的 $1 \leqslant i \leqslant 4, g \in G$, 有

$$w_i g = w_{ig},$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0,$$

W 的特征标是 χ_4. W_4, W_4', W 的和是直和, 所以

$$(V \oplus W)_{\chi_4} = W_4 \oplus W_4' \oplus W.$$

现在暂时从甲烷分子的研究中出来, 为了研究那种在正四面体的四个角上分别有 4 个等价的原子但没有中心原子的更简单的情况. 在这种情况下, W 并不参与运算, 可以按照如下的方式分解 $V_{\chi_4} = W_4 \oplus W_4'$:

(32.21) (1) 向量 $r_1 - 2s_1, r_2 - 2s_2, r_3 - 2s_3, r_4 - 2s_4$ 张成了平移模式的 3 维空间.

(2) 向量 r_1, r_2, r_3, r_4 张成了 V_{χ_4} 的子空间 $V_{\chi_4} \cap \mathbb{R}^{12}_{vib}$, 所以它们给出了最后的特征向量的一个 3 维的空间 (见注记 32.19). 简正模 $\sin(\omega t)r_1$ 有时也叫做一个"伞状模式", 至于这个名字的来源可以看向量 r_1 的图!

现在回到甲烷分子的研究中来.

我们的目标是找到 A 在 $(V \oplus W)_{\chi_4} = W_4 \oplus W_4' \oplus W$ 中的特征向量. 这个问题实际上取决于运动方程中的常数, 所以不能只利用表示理论来解决这个问题. 因为 $\dim((V \oplus W)_{\chi_4}) = 9$, 所以直接在 $(V \oplus W)_{\chi_4}$ 中找出 A 的特征向量是非常困难的, 我们将要说明如何把问题简化为求解 3×3 阶矩阵的特征向量的问题.

令 H 是 S_4 的一个子群, 它包含了固定数字 1 的所有的置换, 令

$$U_1 = \{v \in (V \oplus W)_{\chi_4} : vh = v, \ \forall h \in H\}.$$

因为对于所有的 $v \in V_{\chi_4}, h \in H$, 有 $(vh)A = (vA)h$, 所以 U_1 是 A-不变的.

注意到

$$\langle 3\chi_4 \downarrow H, 1_H \rangle_H = 3,$$

所以 $\dim U_1 = 3$. 但是对于所有的 $h \in H$, 有 $r_1 h = r_1, s_1 h = s_1, w_1 h = w_1$. 因此有

$$U_1 = sp(r_1, s_1, w_1).$$

一旦运动方程, 即矩阵 A 计算出来了, 就有可能计算出 A 在 r_1, s_1, w_1 上的作用的 3×3 阶矩阵 B(见习题 32.5). 那么 B 的特征向量给出了 3 个 A 的特征向量.

此时有

$$r_1(12) = r_2, \quad s_1(12) = s_2, \quad w_1(12) = w_2,$$

因为 A 可以与任意的 G 的作用交换, 所以如下定义的空间 U_2 是 A-不变的:

$$U_2 = sp(r_2, s_2, w_2).$$

并且 A 作用在 r_2, s_2, w_2 上的矩阵还是 B. 同样的结论适用于 U_3, 其中

$$U_3 = sp(r_3, s_3, w_3).$$

因此, 在计算 3×3 矩阵 B 的特征向量的过程中, 我们找到了 A 的 9 个特征向量, 它们构成了 $(V \oplus W)_{\chi_4}$ 的一组基.

A 在 r_1, s_1, w_1 上的作用的一个特征向量很容易找到, 即平移向量

$$r_1 - 2s_1 + 3cos\vartheta w_1,$$

其中 ϑ 是这个正四面体的中心到其中一个顶点的连线与经过这个顶点的一条边的夹角. 因此, 我们得到了平移子模

$$sp(r_1 - 2s_1 + 3\cos\vartheta w_1, r_2 - 2s_2 + 3\cos\vartheta w_2, r_3 - 2s_3 + 3\cos\vartheta w_3).$$

借助于表示理论, 把一个求解 15×15 阶的矩阵 A 的特征向量的问题简化为求解两个 3×3 阶的矩阵的特征向量问题. 没有比此例更壮观的表示论的应用来做为本书的结尾.

第 32 章总结

1. 有 n 个原子的一个分子的对称群 G 包含了那些 $\mathbb{R}^3$ 中的保距同态, 这些同态把每个原子映射成了相同类型的原子.

2. 一个分子的运动方程的形式如下:

$$\ddot{x} = xA,$$

其中 $x \in \mathbb{R}^{3n}$, $3n \times 3n$ 阶矩阵 A 有 $3n$ 个线性无关的特征向量.

3. 如果 u 是 A 的一个特征向量, 相应的特征值是 $-\omega^2$, 那么 $x = \sin(\omega t + \beta)u$(或者在 $\omega = 0$ 时 $x = (t + \beta)u$) 是运动方程的一个解, 叫做简正模. 所有的解都是简正模的一个线性组合.

4. 由位移向量组成的空间 $\mathbb{R}^{3n}$ 是一个 $\mathbb{R}G$-模. 对于任意的 G 中的元素在 $\mathbb{R}^{3n}$ 上的作用是与 A 可以交换的.

5. 为了计算 A 的特征向量 (从而求得运动方程的所有的解), 把这个问题转化到 $\mathbb{R}G$- 模 $\mathbb{R}^{3n}$ 的每个齐次分量 V_{χ_i} 上来. 如果 V_{χ_i} 是不可约的, 那么所有的 V_{χ_i} 中的非零向量都是 A 的特征向量.

第 32 章习题

1. 假设 $b \in O(\mathbb{R}^3)$, 令 $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$.

(a) 证明在 $\mathbb{R}^3$ 的基 e_1, e_2, e_3 下, b 的矩阵 B 满足 $BB^t = I$ (其中 B^t 表示 B 的转置). 证明 $\det B = \pm 1$.

(b) 令 $C = (\det B)B$. 证明

(1) C 有一个实的特征值.

(2) C 有一个正的特征值.

(3) 1 是 C 的一个特征值.

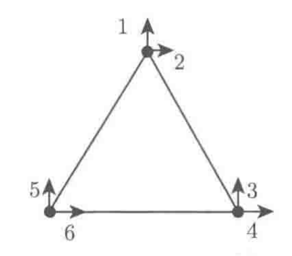
(c) 利用 (a) 和 (b) 证明如果 $\det B=1$, 那么 b 是一个旋转, 如果 $\det B\neq 1$, 那么 $-b$ 是一个旋转.

(d) 证明如果 b 是绕着某个坐标系旋转了一个 ϕ 角的一个旋转, 那么 $\mathrm{tr}B=1+2\cos\phi$.

2. 假设 G 是 $\mathbb{R}^3$ 中的某个分子的对称群, 证明平移子模的特征标 χ_T 和旋转子模的特征标 χ_R 在 $g\in G$ 的值由如下给出:

$$(\chi_T+\chi_R)(g)=\begin{cases}2(1+2\cos\phi), & \text{如果 } b \text{ 是绕着某个坐标系旋转了 } \phi \text{ 角;}\\ 0, & \text{如果 } g \text{ 不是旋转.}\end{cases}$$

3. 考虑例 32.17 中研究的三原子分子. 如下建立位移坐标系:



在这个坐标系下求解运动方程 $\ddot{x}=xA$, 并证明 A 是对称的 (参考命题 32.7 前面的一段).

4. 考虑由例 32.20 中给出的向量 r_1,r_2,r_3,r_4 张成的空间. 找出这个空间的一组基, 并且这组基要比我们用的那组基简单. 并思考是 r_1,r_2,r_3,r_4 的什么性质使我们使用这些向量?

5. 这个习题的作用是使我们找到甲烷分子的运动方程, 从而可以具体写出在例 32.20 结尾出现的矩阵 B. 把正四面体的四个角标记为 1,2,3,4, 并把正四面体的中心标记为 0, 例 32.20 中给出的 15 个单位位移向量

$$v_{12},v_{13},\ldots,v_{43},w_1,w_2,w_3$$

在这里也同样适用, 令分子的位置向量是

$$\sum_{i\neq j}x_{ij}v_{ij}+\sum_{i=1}^{3}y_iw_i.$$

(a) 证明 $\cos(\angle 012)=\sqrt{(2/3)},\cos(\angle 102)=-1/3$.

(b) 证明边 12 从它初始的位置减少的长度是

$$x_{12}+x_{21}+\frac{1}{2}(x_{13}+x_{14}+x_{23}+x_{24}),$$

对于边 13,14,23,24,34 来说有相似的表达式.

同样, 证明边 01 的长度减少量是

$$\sqrt{(2/3)}(x_{12}+x_{13}+x_{14})+y_1-\frac{1}{3}(y_2+y_3),$$

对于边 02,03 来说有相似的表达式.

最后, 证明边 04 的长度减少量是

$$\sqrt{(2/3)}(x_{41}+x_{42}+x_{43})-\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

(c) 令 m_1 代表氢原子, m_2 代表碳原子. 假设氢原子之间的力等于 k_1 乘上它们之间位移的减少量, 氢原子和碳原子之间的力等于 k_2 乘上它们之间位移的减少量.

证明

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_{12}=&-k_1\left[x_{12}+x_{21}+\frac{1}{2}(x_{13}+x_{14}+x_{23}+x_{24})\right]\\&-\frac{1}{3}k_2\left[x_{12}+x_{13}+x_{14}+\sqrt{(3/2)}\left(y_1-\frac{1}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3\right)\right],\end{aligned}$$

对于 $\ddot{x}_{13},\ddot{x}_{14},\ddot{x}_{21},\ddot{x}_{23},\ddot{x}_{24},\ddot{x}_{31},\ddot{x}_{32},\ddot{x}_{34}$ 有相同的结果.

同样, 证明

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_{41}=&-k_1\left[x_{14}+x_{41}+\frac{1}{2}(x_{42}+x_{43}+x_{12}+x_{13})\right]\\&-\frac{1}{3}k_2\left[x_{41}+x_{42}+x_{43}-\frac{1}{3}\sqrt{(3/2)}(y_1+y_2+y_3)\right],\end{aligned}$$

对于 $\ddot{x}_{42},\ddot{x}_{43}$ 有相同的结果.

最后, 证明

$$\begin{aligned}m_2\ddot{y}_1=&-k_2\left[\sqrt{(2/3)}(x_{12}+x_{13}+x_{14}-x_{41}\right.\\&\left.-x_{42}-x_{43})+\frac{4}{3}y_1\right],\end{aligned}$$

对于 $\ddot{y}_2,\ddot{y}_3$ 有相同的结果.

(d) (c) 部分中的方程可以确定运动方程 $\ddot{x}=xA$ 中的矩阵 15×15 阶的矩阵 A. 证明在例 32.20 中出现的向量

$$\sum_{i,j}v_{ij},p_1,p_2,p_3,q_1,q_2$$

是 A 的特征向量.

(e) 求由下面式子给出的 3×3 阶矩阵 B 中的元素 b_{ij} :

$$r_1A=b_{11}r_1+b_{12}s_1+b_{13}w_1,$$

$$s_1A=b_{21}r_1+b_{22}s_1+b_{23}w_1,$$

$$w_1A=b_{31}r_1+b_{32}s_1+b_{33}w_1,$$

其中向量 r_1,s_1,w_1 是在例 32.20 中给出的.

(f) 证明

$$(1,-2,\sqrt{6})$$

是 B 的一个特征向量.

6. 考虑一个假设的分子, 这个分子有四个等价的原子位于正方形的四个角上. 假设它们之间唯一的内力就是沿着正方形的边上的内力.

(a) 求分子的简正模.

(b) 求解运动方程 $\ddot{x} = xA$, 并验证你在 (a) 中求得的向量就是 A 的特征向量.

7. 在这个习题中, 要找到一种方法, 这种方法可以简化当齐次分量 V_{χ_i} 可约的时候, 我们怎样简化求解 A 的特征向量的问题 (见 32.15(5)). 假设 χ_i 是一个不可约的 $\mathbb{R}G$-模的特征标, 并且这个 $\mathbb{R}G$-模作为一个 $\mathbb{C}G$-模时也是不可约的.

假设 $V_{\chi_i} = U_1 \oplus ... \oplus U_m$, 是 m 个同构的不可约的 $\mathbb{R}G$-模的和. 把问题转化到求一个 $m \times m$ 阶矩阵的特征向量的问题上来.

对于 $1 \leqslant i \leqslant m$, 令 ϑ_i 是从 U_1 到 U_i 的一个 $\mathbb{R}G$-同构.

(a) 证明对于所有的 U_1 中的非零向量 u 来说,

$$sp(u\vartheta_1, ..., u\vartheta_m)$$

是维数为 m 的一个 A-不变的向量空间.

(提示: 把函数 $w \mapsto wA$ 与一个投射合成, 再利用习题 23.8.)

(b) 令 A_u 表示 $sp(u\vartheta_1, ..., u\vartheta_m)$ 在基 $u\vartheta_1, ..., u\vartheta_m$ 下的自同态 $w \mapsto wA$ 的矩阵. 证明如果 u 和 v 是 U_1 的非零的元素, 那么 $A_u = A_v$.

(c) 假设 $m \times m$ 阶矩阵 A_u 的特征向量是已知的. 想想怎样求 A 在 V_{χ_i} 中的特征向量?

习题答案

第 1 章

1. 注意到因为 G 是阿贝尔群, 所以 G 的所有的子群都是正规子群; 并且因为 G 是单群, 所以 $G \neq \{1\}$. 令 g 是 G 的一个非单位元. 那么 $\langle g \rangle$ 是 G 的一个正规子群, 所以 $\langle g \rangle = G$. 如果 G 是无限群, 那么 $\langle g^2 \rangle$ 是一个不同于 G 和 $\{1\}$ 的正规子群, 故 G 是有限群. 令 p 是整除 $|G|$ 的一个素数. 那么 $\langle g^p \rangle$ 是一个不同于 G 的正规子群. 因此 $g^p = 1$, 所以 G 是素数阶的循环群.

2. 因为 G 是单群, 并且 $\mathrm{Ker}\vartheta \lhd G$, 所以要么 $\mathrm{Ker}\vartheta = \{1\}$, 要么 $\mathrm{Ker}\vartheta = G$. 如果 $\mathrm{Ker}\vartheta = \{1\}$, 那么 ϑ 是一个同构; 如果 $\mathrm{Ker}\vartheta = G$, 那么 $H = \{1\}$.

3. 首先有 $G \cap A_n = \{g \in G : g$ 是偶置换$\}$, 所以 $G \cap A_n \lhd G$. 因为 $G \cap A_n \neq G$, 所以可以选择 $h \in G$, 但 $h \notin A_n$. 对于所有的 G 中的奇置换 g 来说, 有 $g = (gh^{-1})h \in (G \cap A_n)h$. 因此 $G \cap A_n$ 和 $(G \cap A_n)h$ 是 $G \cap A_n$ 在 G 中仅有的两个右陪集, 所以 $G/(G \cap A_n) \cong C_2$.

4. (a) 使用例 1.4 中的方法, 很容易证明 ϕ 和 ψ 是同态, $\mathrm{Ker}\phi = \{1, a^2\}, \mathrm{Ker}\psi = \{1, c^2\}$.

(b) 因为 $b^2\lambda = I$, 但 $(b\lambda)^2 = Y^2 = -I$, 所以 λ 不是一个同态. 再次应用例 1.4 中的方法验证 μ 是一个同态. 并且有 $\mathrm{Ker}\mu = \{1\}, \mathrm{Im}\mu = L$, 所以 μ 是一个同构.

5. 令

$$D_{4m} = \langle a, b : a^{2m} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle,$$

$$D_{2m} = \langle c, d : c^m = d^2 = 1, d^{-1}cd = c^{-1} \rangle,$$

其中 m 是奇数. 对于所有的 $0 \leqslant i \leqslant m-1, 0 \leqslant j \leqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant 1$ 来说, $D_{2m} \times C_2$ 的元素是

$$(c^i d^j, (-1)^k).$$

令 $x = (c^{(m+1)/2}, -1), y = (d, 1)$. 验证

$$x^{2m} = y^2 = 1, \quad y^{-1}xy = x^{-1}.$$

由例 1.4 我们知道如下定义的函数 $\vartheta : D_{4m} \to D_{2m} \times C_2$:

$$\vartheta : a^i b^j \mapsto x^i y^j \quad (0 \leqslant i \leqslant 2m-1, 0 \leqslant j \leqslant 1)$$

是一个同态. 因为 $\mathrm{Im}\vartheta = \langle x, y \rangle$, 它包含

$$x^2 = (c, 1), \quad x^m = (1, -1),$$

因此 $\mathrm{Im}\vartheta = D_{2m} \times C_2$. 因为 $|D_{4m}| = |D_{2m} \times C_2|$, 所以 ϑ 是一个同构.

6. (a) 令 $G = \langle a \rangle$, 假设 $1 \neq H \leqslant G$. 首先注意到存在 $i > 0$ 使得 $a^i \in H$. 选择尽可能小的 k 使得 $k > 0, a^k \in H$. 如果 $1 \neq a^j \in H$, 那么存在整数 q, r $(0 \leqslant r < k)$ 使得 $j = qk + r$. 因此 $a^r = a^j a^{-qk} = a^j (a^k)^{-q} \in H$. 因为 $r < k$, 有 $r = 0$. 故 $a^j = a^{kq}$, 所以 $H = \langle a^k \rangle$, 因此 H 是循环群.

(b) 假设 $G = \langle a \rangle, |G| = dn$. 如果 $g \in G, g^n = 1$, 那么存在整数 j 使得 $g = a^j, dn|jn$, 所以 $d|j$, 因此有 $g \in \langle a^d \rangle$. 所以

$$\{g \in G : g^n = 1\} = \langle a^d \rangle$$

是一个 n 阶的循环群.

(c) 如果 x 和 y 是有限循环群 G 中的 n 阶元素, 那么 $x, y \in H$, 其中 $H = \{g \in G : g^n = 1\}$. 现在有 $\langle x \rangle$ 和 $\langle y \rangle$ 都是 n 阶的, 并且由 (b) 部分我们知道 H 也是 n 阶的, 我们得到

$$\langle x \rangle = H = \langle y \rangle.$$

因此 $x \in \langle y \rangle$, 所以 x 是 y 的幂次方.

7. 令 G 是非零复数组成的集合. 如果 $g, h \in G$, 那么 $gh \neq 0$, 所以 $gh \in G$. 如果 $g, h, k \in G$, 那么 $(gh)k = g(hk)$, 同时对于任意的 $g \in G$ 有 $1 \in G, 1g = g1 = g$. 最后, 如果 $g \in G$, 那么 $g^{-1} = 1/g \in G$, 并且 $g^{-1}g = gg^{-1} = 1$. 因此 G 在乘法下是一个群.

如果 H 是 G 的一个 n 阶子群, 那么对于所有的 $h \in H$ 来说有 $h^n = 1$(因为由拉格朗日定理有 h 的阶整除 n). 因此

$$H \leqslant \{g \in G : g^n = 1\} = \langle e^{2\pi i/n} \rangle.$$

因为 $|H| = n = |\langle e^{2\pi i/n} \rangle|$, 所以 $H = \langle e^{2\pi i/n} \rangle$.

8. 把 G 分成子集 $\{g, g^{-1}\}(g \in G)$ 的并集. 每个这样的子集大小都是 1 或 2, 并且单位元是大小为 1 的子集. 因此, 如果 $|G|$ 是偶数, 那么存在 $g \in G$ 使得 $g \neq 1$, 子集 $\{g, g^{-1}\}(g \in G)$ 中的元素的个数是 1, 所以 $g = g^{-1}$, 并且 g 的阶是 2.

9. 如下定义矩阵 A, B :

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

验证 $A^8 = I, B^2 = A^4, B^{-1}AB = A^{-1}$. 这些关系表明了群 $\langle A, B \rangle$ 的每个元素的形式都是 $A^j B^k (0 \leqslant j \leqslant 7, 0 \leqslant k \leqslant 1)$. 更进一步有

$$A^j = \begin{pmatrix} e^{ij\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-ij\pi/4} \end{pmatrix}, \quad A^j B = \begin{pmatrix} 0 & e^{ij\pi/4} \\ -e^{-ij\pi/4} & 0 \end{pmatrix}.$$

因为这些矩阵在 $0 \leqslant j \leqslant 7$ 的情况下都是互异的, 所以 $\langle A, B \rangle$ 的阶是 16.

10. 假设 $|G : H| = 2$, 令 $g \in G$. 如果 $g \in H$, 那么 $g^{-1}Hg = H$. 如果 $g \notin H$, 那么 H 和 Hg 是 H 在 G 中的两个不同的右陪集, 同时 H 和 gH 是两个左陪集. 因此 $Hg = gH$, 所以还有 $g^{-1}Hg = H$. 因此 $H \triangleleft G$.

第 2 章

1. 令 $u, w \in W, \lambda \in F$. 因为 ϑ 是一个线性变换, 有

$$(u\vartheta^{-1} + w\vartheta^{-1})\vartheta = (u\vartheta^{-1})\vartheta + (w\vartheta^{-1})\vartheta = u + w,$$

$$(\lambda(w\vartheta^{-1}))\vartheta = \lambda(w\vartheta^{-1})\vartheta = \lambda w.$$

因此 $(u + w)\vartheta^{-1} = u\vartheta^{-1} + w\vartheta^{-1}$, 并且 $(\lambda w)\vartheta^{-1} = \lambda(w\vartheta^{-1})$, 所以 ϑ^{-1} 是一个线性变换.

2. (1)⇒ (2): 如果 ϑ 是可逆的, 那么 ϑ 是单射, 所以 $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$.

(2)⇒ (3): 如果 $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$, 那么 $\dim(\mathrm{Im}\vartheta) = \dim V$ (由 (2.12)), 所以 $\mathrm{Im}\vartheta = V$ (由 (2.7)).

(3)⇒ (1): 假设 $\mathrm{Im}\vartheta = V$, 那么 ϑ 是满射. 由 (2.12), $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$. 如果 $u, v \in V, u\vartheta = v\vartheta$, 那么 $(u - v)\vartheta = 0$, 所以 $u - v \in \mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$, 所以 $u = v$. 因此 ϑ 是单射. 因为 ϑ 既是满射又是单射, 所以 ϑ 是可逆的.

3. 首先假设 $V = U \oplus W$. 那么 $V = U + W$. 令 $v \in U \cap W$, 那么 $v = v + 0 = 0 + v$, 这说明存在两种形式把 v 表达成 U 中元素和 W 中元素的和. 因为这种表达是唯一的, 所以 $v = 0$. 因此 $U \cap W = \{0\}$.

现在假设 $V = U + W, U \cap W = \{0\}$. 如果 $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, 其中 $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$, 那么 $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$. 因此 $u_1 = u_2, w_1 = w_2$. 这表示了 $V = U \oplus W$.

4. 首先假设 $V = U \oplus W$. 如果 $v \in V$, 那么存在 $u \in U, w \in W$ 使得 $v = u + w$; 因为 u 是 $u_1, ..., u_r$ 的一个线性组合, w 是 $w_1, ..., w_s$ 的一个线性组合, 所以 v 是 $u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s$ 的一个线性组合. 因此 $u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s$ 张成了 V. 假设

$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_r u_r + \mu_1 w_1 + ... + \mu_s w_s = 0,$$

其中 $\lambda_i, \mu_j \in F$. 因为 $V = U \oplus W$, 表达式 $0 = 0 + 0$ 是 0 分解成 U 和 W 中元素和的形式的唯一分解形式, 所以

$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_r u_r = \mu_1 w_1 + ... + \mu_s w_s = 0.$$

因为 $u_1, ..., u_r$ 是线性无关的, 所以对于所有的 i 来说有 $\lambda_i = 0$, 相似地, 对所有的 i, 有 $\mu_i = 0$. 因此 $u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s$ 是线性无关的, 所以它们是 V 的一组基.

反过来, 假设 $u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s$ 是 V 的一组基. 如果 $v \in U \cap W$, 那么存在 $\lambda_i, \mu_j \in F$ 使得 $v = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_r u_r = \mu_1 w_1 + ... + \mu_s w_s$, 因为 $u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s$ 是线性无关的, 所以对于所有的 i, j 来说有 $\lambda_i = 0, \mu_j = 0$. 因此 $v = 0$, 所以 $U \cap W = \{0\}$. 很容易证明 $V = U + W$, 再由习题 3 我们知道 $V = U \oplus W$.

5. (a) 假设 $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$. 令 $u \in U_1 \cap (U_2 + U_3)$. 那么存在 $u_i \in U_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$ 使得 $u = u_1 = u_2 + u_3$. 因为 $u_1 + 0 + 0 = 0 + u_2 + u_3$, 并且 $U_1 + U_2 + U_3$ 是直和, 有 $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. 因此 $U_1 \cap (U_2 + U_3) = \{0\}$. 相似地有 $U_2 \cap (U_1 + U_3) = U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$.

现在假设 $U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_2 \cap (U_1 + U_3) = U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$. 假设 $u_i, u_i' \in U_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$ 并有 $u_1 + u_2 + u_3 = u_1' + u_2' + u_3'$. 那么 $u_1 - u_1' = (u_2' - u_2) + (u_3' - u_3) \in$

$U_1 \cap (U_2+U_3)=\{0\}$, 所以 $u_1=u_1'$. 类似有 $u_2=u_2', u_3=u_3'$. 因此 $V=U_1\oplus U_2\oplus U_3$. (b) 令 $V=\mathbb{R}^2, U_1=sp((1,0)), U_2=sp((0,1)), U_3=sp((1,1))$.

6. 由习题 4, 如果 $V=U\oplus W$, 那么 $\dim V=\dim U+\dim W$. 更一般的结果是如果 $V=U_1\oplus\ldots\oplus U_r$, 那么 $V=U_1\oplus(U_2\oplus\ldots\oplus U_r)$(见 (2.10)), 对 r 进行归纳有 $\dim(U_2\oplus\ldots\oplus U_r)=\dim U_2+\ldots+\dim U_r$, 所以 $\dim V=\dim U_1+\ldots+\dim U_r$.

7. 令 $V=\mathbb{R}^2$. 如下定义 $\vartheta,\phi: V\to V$:

$$\vartheta:(x,y)\mapsto(x,0);\quad \phi:(x,y)\mapsto(y,0).$$

那么 $\mathrm{Im}\vartheta=sp((1,0)), \mathrm{Ker}\vartheta=sp((0,1))$, 所以 $V=\mathrm{Im}\vartheta\oplus\mathrm{Ker}\vartheta$, 并且有 $\mathrm{Im}\phi=\mathrm{Ker}\phi=sp((1,0))$, 所以 $V\neq\mathrm{Im}\phi\oplus\mathrm{Ker}\phi$.

8. 假设 ϑ 是一个投射. 那么由命题 2.32 可以知道 $V=\mathrm{Im}\vartheta\oplus\mathrm{Ker}\vartheta$. 取 $\mathrm{Im}\vartheta$ 的一组基 $u_1,\ldots,u_r$, $\mathrm{Ker}\vartheta$ 的一组基 $w_1,\ldots,w_s$, 那么由习题 4 我们知道 $u_1,\ldots,u_r,w_1,\ldots,w_s$ 是 V 的一组基, 记作 $\mathscr{B}$. 因为对于所有的 i,j 来说有 $u_i\vartheta=u_i, w_j\vartheta=0$, 所以矩阵 $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ 是对角阵, 其中对角元素是 r 个 1 和 s 个 0.

反过来, 如果 $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ 的形式是给定的形式, 那么很显然有 $\vartheta^2=\vartheta$, 所以 ϑ 是一个投射.

9. 令 $v\in V$. 那么

$$v=\frac{1}{2}(v+v\vartheta)+\frac{1}{2}(v-v\vartheta).$$

注意到 $\frac{1}{2}(v+v\vartheta)\vartheta=\frac{1}{2}(v\vartheta+v)$, 所以 $\frac{1}{2}(v+v\vartheta)\in U$. 类似地有 $\frac{1}{2}(v-v\vartheta)\in W$. 因此 $V=U+W$. 如果 $v\in U\cap W$, 那么 $v=v\vartheta=-v$, 所以 $v=0$. 因此由习题 3 我们知道 $V=U\oplus W$. 基 $\mathscr{B}$ 的构造与第 8 题类似.

第 3 章

1. 首先假设 ρ 是 G 的一个表示. 那么

$$I=1\rho=(a^m)\rho=(a\rho)^m=A^m.$$

反过来, 假设 $A^m=I$. 那么对于所有的整数 i (包括 $i>m-1$ 和 $i<0$) 来说有 $(a^i)\rho=A^i$. 因此对于所有的整数 i,j 来说有

$$(a^ia^j)\rho=(a^{i+j})\rho=A^{i+j}=A^iA^j=(a^i\rho)(a^j\rho),$$

所以 ρ 是一个表示.

2. 验证 $A^3=B^3=C^3=I$. 因此由习题 1 我们知道每个 ρ_j 都是一个表示. 表示 ρ_2 和 ρ_3 是忠实表示, 但是 ρ_1 不是忠实表示.

3. 如下定义 ρ:

$$(a^ib^j)\rho=(-1)^j\quad(0\leqslant i\leqslant n-1, 0\leqslant j\leqslant 1).$$

很容易验证 ρ 是 G 的一个表示.

4. (1) 对于所有的 $g \in G$, 有 $I^{-1}(g\rho)I = g\rho$, 因此 ρ 等价于 ρ.

(2) 如果 ρ 等价于 σ, 那么存在一个可逆矩阵 T 使得对于所有的 $g \in G$ 来说有 $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$. 那么 $g\rho = (T^{-1})^{-1}(g\sigma)T^{-1}$, 所以 σ 等价于 ρ.

(3) 如果 ρ 等价于 σ, σ 等价于 τ, 那么存在可逆矩阵 S, T 使得对于所有的 $g \in G$ 来说有 $g\sigma = S^{-1}(g\rho)S, g\tau = T^{-1}(g\sigma)T$. 那么 $g\tau = (ST)^{-1}(g\rho)(ST)$, 所以 ρ 等价于 τ.

5. 验证在每种情况下 $(1) S = A, T = B, (2) S = A^3, T = -B, (3) S = -A, T = B, (4) S = C, T = D$ 有

$$S^6 = T^2 = I, \quad T^{-1}ST = S^{-1}.$$

所以每个 ρ_k 都是一个表示 (见例 1.4).

矩阵 $A^rB^s(0 \leqslant r \leqslant 5, 0 \leqslant s \leqslant 1)$ 是互不相同的, 所以 ρ_1 是忠实表示. 相似地, 有 ρ_4 是忠实表示. 但是 ρ_2 和 ρ_3 不是忠实表示, 这是因为 $a^2\rho_2 = I, a^3\rho_3 = I$.

表示 ρ_1 和 ρ_4 是等价的, 为了证明这个, 令

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

那么对于所有的 $g \in G$ 来说有 $T^{-1}(g\rho_4)T = g\rho_1$(可以通过求解 C 的特征向量来求 T).

如果 $j \neq 2$, 那么 $a^2\rho_j \neq I$, 因此 ρ_2 和其他几个都不等价. 如果 $j \neq 3$, 那么 $a^3\rho_j \neq I$, 因此 ρ_3 和其他几个都不等价.

6. 如下定义矩阵 A, B:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

那么函数 $\rho : a^rb^s \mapsto A^rB^s(0 \leqslant r \leqslant 3, 0 \leqslant s \leqslant 1)$ 是 D_8 的一个忠实表示, 其中 $D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. 把这个结果与例 3.2(1) 相比较.

7. 由定理 1.10 我们知道 $G/\mathrm{Ker}\rho \cong \mathrm{Im}\rho$. 但是 $\mathrm{Im}\rho \leqslant GL(1, F)$ 并有 $GL(1, F)$ 是交换群. 因此 $G/\mathrm{Ker}\rho$ 是交换群.

8. 不是, 假设 G 是任意的一个非交换群, 令 ρ 是平凡表示.

第 4 章

1.

g	1	(12)	(13)
$[g]_{\mathscr{B}_1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$[g]_{\mathscr{B}_2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

g	(23)	(123)	(132)
$[g]_{\mathscr{B}_1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$[g]_{\mathscr{B}_2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

所有的矩阵 $[g]_{\mathscr{B}_2}$ 的形式都是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}.$$

2. 令 $g \in S_n$. 对于所有的 $u, v \in V, \lambda \in F$, 有

$$vg \in V, \quad v1 = v, \quad (\lambda v)g = \lambda(vg), \quad (u+v)g = ug + vg.$$

只剩下验证定义 4.2 中的 (2). 令 $v \in V, g, h \in S_n$. 首先假设 $gh \in A_n$. 那么 $v(gh) = v, (vg)h = v$, 因为或者有 $vg = v = vh$(如果 $g, h \in A_n$), 或者有 $vg = -v = vh$(如果 $g, h \notin A_n$). 接下来假设 $gh \notin A_n$, 那么 $v(gh) = -v, (vg)h = -v$, 因为 g 和 h 有且仅有一个是在 A_n 中的. 现在已经验证了定义 4.2 中的所有的条件, 所以 V 是一个 FG-模.

3. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

验证

$$A^4 = I, \quad B^2 = A^2, \quad B^{-1}AB = A^{-1}.$$

因此 $\rho : a^i b^j \mapsto A^i B^j (0 \leqslant i \leqslant 3, 0 \leqslant j \leqslant 1)$ 是 Q_8 在 $\mathbb{R}$ 上的一个表示. 令 $V = \mathbb{R}^4$ 由定理 4.4(1), 如果对于任意的 $v \in V, g \in Q_8$ 定义 $vg = v(g\rho)$, 那么 V 是一个 $\mathbb{R}Q_8$-模. 如果令 $v_1 = (1,0,0,0), v_2 = (0,1,0,0), v_3 = (0,0,1,0), v_4 = (0,0,0,1)$, 那么对于所有的 i 来说, $v_i a, v_i b$ 就是问题中所要求的.

4. 首先验证如果

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

那么交换 A 的前两行得到了 MA, 交换 A 的前两列得到了 AM. 令 g 是具有下面的性质的 S_n 中的置换, 对于所有的 i,

$$B \text{ 的第 } i \text{ 行是 } A \text{ 的第 } ig \text{ 行}.$$

令 P 是如下定义的 $n \times n$ 阶矩阵 (p_{ij}) :

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } j = ig; \\ 0, & \text{如果 } j \neq ig. \end{cases}$$

那么 P 是一个置换阵, 并有 PA 的 ij-元是

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik} a_{kj} = a_{ig,j}.$$

因此有 $PA = B$.

如果 C 是一个通过交换 A 的列得到的一个矩阵, 那么存在某个置换阵 Q 使得 $C = AQ$, 与对行交换的证明是类似的.

第 5 章

1. 很容易证明 V 是一个 FG-模. 令 U 是 V 的一个非零的 FG-子模, 令 $(\alpha, \beta) \in U$, 且 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. 那么 $(\alpha, \beta) + (\alpha, \beta)a = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \in U, (\alpha, \beta) - (\alpha, \beta)a = (\alpha - \beta, \beta - \alpha) \in U$. 因为在 $\alpha + \beta$ 和 $\alpha - \beta$ 中至少有一个是非零的, 所以有 (1,1) 或 (1,−1) 属于 U. 因此 V 的 FG-子模是 $\{0\}, sp((1,1)), sp((1,-1))$ 和 V.

2. 假设 ρ 的次数是 n, ρ 是可约的. 那么 ρ 等价于如下形式的一个表示 τ :

$$\tau : g \mapsto \left(\begin{array}{c|c} X_g & 0 \\ \hline Y_g & Z_g \end{array} \right) \quad (g \in G)$$

其中 X_g 是一个 $k \times k$ 阶矩阵并有 $0 < k < n$. 那么 σ 是等价于 τ 的, 这是因为 σ 等价于 ρ. 因此 σ 是可约的.

3. 令 $G = D_{12}$, 且 $\rho_1, ..., \rho_4$ 是在习题 3.5 中定义的 G 的表示. 首先考虑 FG-模 $V = F^2$, 其中对于所有的 $v \in V, g \in G$ 来说有 $vg = v(g\rho_1)$. 假设 U 是 V 的一个非零的 FG-子模. 那么 U 是一个 FH-模, 其中 H 是子群 $\{1, b\}$. 由习题 1 的结论我们知道, (1,1) 或者 (1,−1) 在 U 中. 因为 (1,1) 和 (1,1)a 是线性无关的, 同时 (1,−1) 和 (1,−1) a 是线性无关的, 所以有 $\dim U \geqslant 2$. 因此 $U = V$, V 是不可约的 (另一种证明方法可以参考例 5.5(2)). 因此 ρ_1 是不可约的, 同时 ρ_4 是不可约的, 因为 ρ_1 和 ρ_4 是等价的.

现在令 $V = F^2$, 对于所有的 $v \in V, g \in G$ 来说有 $vg = v(g\rho_2)$. 那么 $(1,1)a = -(1,1) = (1,1)b$. 因此 $sp((1,1))$ 是 V 的一个 FG-子模, 并有 ρ_2 是可约的.

最后可以对 ρ_1 利用类似讨论的方法来说明 ρ_3 是不可约的.

4. (a) 验证给定的关系是很容易的. 有了这些关系, 可以把 G 中的每个元素写成如下形式:

$$a^i b^j c^k \quad (0 \leqslant i \leqslant 2, 0 \leqslant j \leqslant 2, 0 \leqslant k \leqslant 1).$$

那么 $|G| \leqslant 18$. 但是显然有 $|\langle a, b\rangle| = 9, \langle a, b\rangle \neq G$. 所以由拉格朗日定理我们知道 $|G|$ 是 9 的倍数并且 $|G| > 9$. 因此有 $|G| = 18$.

(b) 令

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

可以验证 $A^3 = B^3 = C^2 = I, AB = BA, C^{-1}AC = A^{-1}, C^{-1}BC = B^{-1}$. 因此 ρ 是一个表示 (与例 1.4 进行比较).

(c) 对于每个 $\langle a, b\rangle$ 中的元素 g 来说, 存在一个 3 次单位根 ξ 使得

$$g\rho = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$$

但是有且仅有 3 个不同的 3 次单位根, 所以存在不同的 $g_1, g_2 \in \langle a, b\rangle$ 使得 $g_1\rho = g_2\rho$. 因此 ρ 不是忠实表示.

(d) 令 $V = \mathbb{C}^2$ 是通过定义 $vg = v(g\rho)(v \in \mathbb{C}^2, g \in G)$ 而得到的 $\mathbb{C}G$-模. 如果 U 是 V 的一个非零的 $\mathbb{C}G$-子模, 那么 U 是一个 $\mathbb{C}H$-子模, 其中 H 是子群 $\{1, c\}$. 因此由习题 1 我们知道 (1,1) 或者 (1,−1) 在 U 中, 相应地, 令 u 是 (1,1) 或 (1,−1)(所以 $u \in U$). 现在 u 和 ua 是线性无关的, 除非 $\varepsilon = 1, u$ 和 ub 是线性无关的, 除非 $\eta = 1$. 因此, 如果 $\varepsilon \neq 1$ 或者 $\eta \neq 1$ 那么 $\dim U = 2$, 所以 ρ 是不可约的. 另一方面, 如果 $\varepsilon = \eta = 1$, 那么 $sp((1,1))$ 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模, 所以 ρ 是可约的.

5. 令 $V = \{0\}$, 且 $0g = 0$ 对于任意的 $g \in G$ 成立. 那么 V 既不是可约的又不是不可约的.

第 6 章

1. (a) $xy = -2 \cdot 1 - a^3 + ab + 3a^2b + 2a^3b$,

$$yx = -2 \cdot 1 - a^3 + b + 2a^2b + 3a^3b,$$
$$x^2 = 4 \cdot 1 + a^2 + 4a^3.$$

(b) $az = ab + a^3b = a^2ba + ba = za, bz = 1 + a^2 = zb$. 因此对于所有的 i, j 有 $a^ib^jz = za^ib^j$, 所以对于所有的 $g \in G$, 有 $gz = zg$. 如果 $r \in \mathbb{C}G$, 那么 $r = \sum_g \lambda_g g$, 其中 $\lambda_g \in \mathbb{C}$, 所以 $rz = \sum \lambda_g gz = \sum \lambda_g zg = zr$.

2. 令 $C_2 \times C_2 = \langle a, b : a^2 = b^2 = 1, ab = ba\rangle$. 在 $F(C_2 \times C_2)$ 的基 $1, a, b, ab$ 下, 正则表示 ρ 如下给出:

$$1\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b\rho=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad (ab)\rho=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

3. 不是. 令 $G=\langle a, a^2=1\rangle$, 取 $r=1+a, s=1-a$.

4. (a) 因为 g 跑遍了 G, 所以 gh 和 hg 也跑遍了 G. 因此有 $ch=hc=c$.

(b) $c^2=c\sum\limits_{h\in G}h=\sum\limits_{h\in G}ch=|G|c$.

(c) $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ 中的所有的元素是 1(与习题 2 的结论相比较). 这是因为对于所有的 i,j 都存在 G 中的唯一一个元素 h 使得 $g_ih=g_j$.

5. 首先注意到如果 u 是一个向量空间中的一个元素, 并且有 $u+u=u$, 那么 $u=0$. 现在 $0r=(0+0)r=0r+0r, v0=v(0+0)=v0+v0$, 因此有 $0r=v0=0$.

令 V 是平凡的 FG-模, 令 $0\neq v\in V, 1\neq g\in G$. 如果 $r=1-g$, 那么 $vr=0$, 并且 v 和 r 都不是 0.

6. 令 $v_1=1+\omega^2a+\omega a^2, v_2=b+\omega^2ab+\omega a^2b$. 验证 $v_1a=\omega v_1, v_2a=\omega^2v_2, v_1b=v_2, v_2b=v_1$. 因此 W 是 $\mathbb{C}G$ 的一个 $\mathbb{C}G$-子模. 不论是利用例 5.5(2) 中的证明方法还是习题 5.3 的结论都可以证明 W 是不可约的.

第 7 章

1. 对于所有的 $u_1,u_2\in U, \lambda\in F$ 和 $g\in G$, 有

$$(u_1+u_2)\vartheta\phi=(u_1\vartheta+u_2\vartheta)\phi=u_1(\vartheta\phi)+u_2(\vartheta\phi),$$

$$(\lambda u_1)\vartheta\phi=(\lambda(u_1\vartheta))\phi=\lambda(u_1(\vartheta\phi)),$$

$$(u_1g)\vartheta\phi=((u_1\vartheta)g)\phi=((u_1\vartheta)\phi)g=(u_1(\vartheta\phi))g.$$

2. 令 $a=(12345), v_1,...,v_5$ 是 G 的置换模在 F 上的自然基. 那么

$$\vartheta:\lambda_1v_1+...+\lambda_5v_5\mapsto\lambda_1 1+\lambda_2a+\lambda_3a^2+\lambda_4a^3+\lambda_5a^4$$

是所要求的 FG-同构 (注意到 $v_i\vartheta=a^i$, 所以 $(v_ia)\vartheta=v_{i+1}\vartheta=a^{i+1}=(v_i\vartheta)a$, 因此 ϑ 是一个 FG-同构).

3. 很容易证明 V_0 是 V 的一个 FG-子模. 令 $x\in G$, 那么

$$\sum_{g\in G}vxg=\sum_{g\in G}vg=\sum_{g\in G}vgx.$$

因此 $(vx)\vartheta=v\vartheta=(v\vartheta)x$, 注意到 $V\vartheta\subseteq V_0$, 所以 ϑ 是一个从 V 到 V_0 的 FG-同态.

如果 $v\in V_0$, 那么 $(v/|G|)\vartheta=v$, 因此 ϑ 是满射.

4. 假设 $\phi : V \to W$ 是一个 FG-同构. 令 $g \in G$. 对于所有的 $v \in V_0$ 有 $(v\phi)g = (vg)\phi = v\phi$, 所以 $V_0\phi \subseteq W_0$. 对于所有的 $w \in W_0$, 有 $(w\phi^{-1})g = (wg)\phi^{-1} = w\phi^{-1}$, 所以 $W_0\phi^{-1} \subseteq V_0$. 因此函数 ϕ 限制到 V_0 上是一个从 V_0 到 W_0 的 FG-同构.

5. 不是. 令 $v_1, ..., v_4$ 是 G 的置换模 V 在 F 上的自然基. 在沿用习题 3 的符号下, 有

$$V_0 = sp(v_1 + v_2, v_3 + v_4), \quad (FG)_0 = sp(\sum_{g \in G} g).$$

因为 V_0 和 $(FG)_0$ 的维数是不同的, 所以由习题 4 我们知道 V 和 FG 是不同构的 FG-模.

6. (a) 很容易看出 ϑ 是一个线性变换. 所以

$$\begin{aligned}(\alpha 1 + \beta x)x\vartheta &= (\beta 1 + \alpha x)\vartheta = (\beta - \alpha)(1 - x)\\ &= (\alpha - \beta)(1 - x)x = (\alpha 1 + \beta x)\vartheta x.\end{aligned}$$

因此 ϑ 是一个 FG-同态.

(b) $(\alpha - \beta)(1 - x)\vartheta = ((\alpha - \beta) - (\beta - \alpha))(1 - x) = 2(\alpha - \beta)(1 - x)$. 因此有 $\vartheta^2 = 2\vartheta$.

(c) 令 $\mathscr{B}$ 是基 $1 - x, 1 + x$.

第 8 章

1. $V = sp(-\omega v_1 + v_2) \oplus sp(-\omega^2 v_1 + v_2)$, 其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$(找出 x 的特征向量).

2. 令 $G = \{1, a, b, ab\} \cong C_2 \times C_2$(所以有 $a^2 = b^2 = 1, ab = ba$). 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{R}G =& sp(1 + a + b + ab) \oplus sp(1 + a - b - ab)\\ &\oplus sp(1 - a + b - ab) \oplus sp(1 - a - b + ab).\end{aligned}$$

3. 令 G 是任意的一个群, 令 V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个 2 维的向量空间, 基为 v_1, v_2. 对于任意的 $v \in V, g \in G$, 定义 $vg = v$, 这样 V 就变成了一个 $\mathbb{C}G$-模. 如果令

$$\vartheta : \lambda v_1 + \mu v_2 \mapsto \lambda v_2 \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

那么 ϑ 是从 V 到 V 的一个 $\mathbb{C}G$-同态, 并有 $\mathrm{Ker}\vartheta = \mathrm{Im}\vartheta = sp(v_2)$.

4. 假设 ρ 是可约的. 那么根据 Maschke 定理, ρ 等价于如下形式的一个表示 σ :

$$g\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_g & 0 \\ 0 & \mu_g \end{pmatrix} \quad (\lambda_g, \mu_g \in \mathbb{C})$$

那么对于所有的 $g, h \in G$, 有 $(g\sigma)(h\sigma) = (h\sigma)(g\sigma)$, 因为所有的对角矩阵相互之间是可以交换的, 因此对于所有的 $g, h \in G$, 有 $(g\rho)(h\rho) = (h\rho)(g\rho)$, 矛盾. 因此 ρ 是不可约的.

5. $U = sp((1, 0))$ 是 V 的唯一一个 1 维的 $\mathbb{C}G$-子模, 所以不存在 V 的 $\mathbb{C}G$-子模 W 使得 $V = U \oplus W$.

6. (1) 很容易证明 $[\,,\,]$ 是复内积. 例如, 如果 $u \neq 0$, 那么对于所有的 $x \in G$ 有 $(ux, ux) > 0$, 所以 $[u, u] > 0$. 同时

$$[ug, vg] = \sum_{x \in G}(ugx, vgx) = \sum_{x \in G}(ux, vx) = [u, v].$$

(2) 很容易证明 $U^{\perp}$ 是 V 的一个子空间. 令 $v \in U^{\perp}, g \in G$, 那么对于所有的 $u \in U$,

$$[u, vg] = [ug^{-1}, vgg^{-1}] = [ug^{-1}, v] = 0.$$

最后一个等号成立是因为 $ug^{-1} \in U$, 因此 $vg \in U^{\perp}$, 所以 $U^{\perp}$ 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模.

(3) 令 $W = U^{\perp}$. 那么 $V = U \oplus W$, 并由 (2) 知道 W 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模.

7. 我们知道正则 $\mathbb{C}G$-模 $\mathbb{C}G$ 是忠实模 (命题 6.6). 令 $\mathbb{C}G = U_1 \oplus ... \oplus U_r$, 其中 $U_1, ..., U_r$ 是 $\mathbb{C}G$ 的不可约的 $\mathbb{C}G$-子模. 那么存在 $i \in \{1, ..., r\}, g \in G$ 使得存在某个 $u \in U_i$ 有 $ug \neq u$(否则对于所有的 $v \in \mathbb{C}G$ 有 $vg = v$ 成立). 定义

$$K = \{x \in G : vx = v,\ \forall v \in U_i\}.$$

经验证 K 是 G 的一个正规子群, 因为 $g \notin K$, 所以 $K \neq G$. 又因为 G 是单群, 所以有 $K = \{1\}$. 这说明 U_i 是一个不可约的忠实 $\mathbb{C}G$-模.

第 9 章

1. 令 $C_2 = \langle a : a^2 = 1 \rangle$. 不可约表示 ρ_1, ρ_2 :

$$1\rho_1 = a\rho_1 = (1), \quad 1\rho_2 = (1), \quad a\rho_2 = (-1).$$

令 $C_3 = \langle b : b^3 = 1 \rangle, \omega = e^{2\pi i/3}$. 不可约表示 ρ_1, ρ_2, ρ_3 :

$$1\rho_1 = b\rho_1 = b^2\rho_1 = (1), \quad b^i\rho_2 = (\omega^i), \quad b^i\rho_3 = (\omega^{2i}).$$

令 $C_2 \times C_2 = \{(1,1), (x,1), (1,y), (x,y)\}$, 其中 $x^2 = y^2 = 1$. 不可约表示 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$:

$$g\rho_1 = (1), \quad \forall g \in C_2 \times C_2,$$

$$(x^i, y^j)\rho_2 = (-1)^j,$$

$$(x^i, y^j)\rho_3 = (-1)^i,$$

$$(x^i, y^j)\rho_4 = (-1)^{i+j}.$$

2. 令 $C_4 \times C_4 = \langle (x,1), (1,y) : x^4 = y^4 = 1 \rangle$.

(a) $\rho : (x^i, y^j) \mapsto (-1)^i$.

(b) 如果 $g_1 = (x^2, 1), g_2 = (1, y^2)$, 那么 g_1, g_2, g_1g_2 的阶都是 2. 因为对于所有的表示 σ 来说有 $(g_1g_2)\sigma = (g_1\sigma)(g_2\sigma)$, 所以不能得到 $(g_1g_2)\sigma = g_1\sigma = g_2\sigma = (-1)$.

3. 对于 $1 \leqslant j \leqslant r$, 令 C_{n_j} 是由 g_j 生成的, 令 $\varepsilon_j = e^{2\pi i/n_j}$. 那么

$$\rho : (g_1^{i_1}, ..., g_r^{i_r}) \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{i_1} & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_r^{i_r} \end{pmatrix}$$

是 $C_{n_1} \times ... \times C_{n_r}$ 的一个次数为 r 的忠实表示.

是的. 如果 $r = 2, n_1 = 2, n_2 = 3$, 那么

$$\sigma : (g_1^{i_1}, g_2^{i_2}) \mapsto (\varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2})$$

是次数为 $1(< r)$ 的一个忠实表示.

4. 验证当 $A = a\rho, B = b\rho$ 时有 $A^4 = B^2 = I, B^{-1}AB = A^{-1}$. 因此 ρ 是一个表示, 同理证明 σ 是一个表示.

如果对于 $g = a, b$ 来说有 $M(g\rho) = (g\rho)M$, 那么存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $M = \lambda I$. 因此 ρ 是不可约的 (推论 9.3).

注意到矩阵

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

与任意的 $g\sigma(g \in G)$ 可以交换, 因此 σ 是可约的 (推论 9.3).

5. 令 $z = \sum_{g \in G} g$. 那么对于所有的 $x \in G$, 有 $xz = z = zx$. 因此 $z \in Z(\mathbb{C}G)$, 再由命题 9.14 很快就可以得到结论.

6. (a) 很显然有 a 与 $a + a^{-1}$ 可交换. 同时 $b^{-1}(a + a^{-1})b = a^{-1} + a$, 所以 b 可以与 $a + a^{-1}$ 可交换.

(b) 验证对于所有的 $w \in W$ 都有 $w(a + a^{-1}) = -w$.

7. (a) 令 $C_n = \langle x : x^n = 1 \rangle$. 那么 $\rho : x^j \mapsto (e^{2\pi ij/n})$ 是 C_n 的一个不可约的忠实表示.

(b)

$$\rho : a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

给出了 D_8 的一个不可约的忠实表示 (见例 5.5(2)).

(c) $C_2 \times D_8$ 的中心是同构于 $C_2 \times C_2$ 的, 所以它不是循环群. 因此由命题 9.16 我们知道 $C_2 \times D_8$ 没有不可约的忠实表示.

(d) 令 $C_3 = \langle x : x^3 = 1 \rangle, \omega = e^{2\pi i/3}$, 验证

$$\rho : (x, a) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, (x, b) \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}$$

给出了 $C_3 \times D_8$ 的一个表示. 它是不可约的忠实表示 (例如可以参见习题 8.4).

第 10 章

1. 令 $V = sp\left(\sum_{g\in G} g\right)$. 那么 V 是 $\mathbb{C}G$ 的一个平凡的 $\mathbb{C}G$-子模. 现在假设 U 是 $\mathbb{C}G$ 的任意一个平凡的 $\mathbb{C}G$-子模, 那么存在 u 使得 $U = sp(u)$. 那么对于任意的 $g \in G$, 有 $ug = u$, 所以 $|G|u = u\left(\sum_{g\in G} g\right) = \left(\sum_{g\in G} g\right) u \in V$. 因此 $U = V$, 所以 $\mathbb{C}G$ 有且仅有一个平凡的 $\mathbb{C}G$-子模, 即 V.

2. 令 $G = \langle x : x^4 = 1\rangle$. 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{C}G =& sp(1+x+x^2+x^3) \oplus sp(1+ix-x^2-ix^3)\\ &\oplus sp(1-x+x^2-x^3) \oplus sp(1-ix-x^2+ix^3).\end{aligned}$$

3. 令

$$\begin{aligned}u_1 &= 1+a+a^2+a^3-b-ab-a^2b-a^3b,\\ u_2 &= 1-a+a^2-a^3+b-ab+a^2b-a^3b,\\ u_3 &= 1-a+a^2-a^3-b+ab-a^2b+a^3b.\end{aligned}$$

4. 把 $\mathbb{C}G$ 分解成不可约的 $\mathbb{C}G$-子模的直和. 令

$$v_0 = 1+a+a^2+a^3,\ v_1 = 1+ia-a^2-ia^3,$$

$$v_2 = 1-a+a^2-a^3,\ v_1 = 1-ia-a^2+ia^3$$

(与习题 2 的解答相比较). 对于 $0 \leqslant j \leqslant 3$, 令 $w_j = bv_j$. 那么就像在例 10.8(2) 中一样, 子空间 $sp(v_0, w_0), sp(v_1, w_3), sp(v_2, w_2), sp(v_3, w_1)$ 是 $\mathbb{C}G$ 的 $\mathbb{C}G$-子模. 有

$$sp(v_0, w_0) = U_0 \oplus U_1, \quad sp(v_2, w_2) = U_2 \oplus U_3,$$

其中 $U_i = sp(u_i)(0 \leqslant i \leqslant 3), u_1, u_2, u_3$ 是习题 3 中的解, $u_0 = \sum_{g\in G} g$.

令 $U_4 = sp(v_1, w_3), U_5 = sp(v_3, w_1)$. 那么就像在例 5.5(2) 中一样 (或看习题 8.4), U_4 和 U_5 是不可约的 $\mathbb{C}G$-模. 更进一步地有 $U_4 \cong U_5$, 这是因为存在一个 $\mathbb{C}G$-同构 $v_1 \mapsto w_1$, $w_3 \mapsto v_3$.

定理 10.5 告诉我们有且仅有 5 个不同构的不可约的 $\mathbb{C}G$-模, 分别是 U_0, U_1, U_2, U_3, U_4. 因此 D_8 的每个 $\mathbb{C}$ 上的不可约的表示都等价于下面之一:

$$\rho_0 : a \mapsto (1), b \mapsto (1),$$

$$\rho_1 : a \mapsto (1), b \mapsto (-1),$$

$$\rho_2 : a \mapsto (-1), b \mapsto (1),$$

$$\rho_3 : a \mapsto (-1), b \mapsto (-1),$$

$$\rho_4 : a \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. 令 $\vartheta : U_1 \to U_2$ 是一个 $\mathbb{C}G$-同构. 对于 $\lambda \in \mathbb{C}$, 如下定义函数 $\phi_\lambda : U_1 \to V$

$$\phi_\lambda : u \mapsto u + \lambda u\vartheta \quad (u \in U_1).$$

那么很容易看出 ϕ_λ 是一个 $\mathbb{C}G$-同态. 并有

$$u \in \mathrm{Ker}\phi_\lambda \Leftrightarrow u + \lambda u\vartheta = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

因为 $U_1 + U_2$ 是直和, 所以 $U_1 \cong \mathrm{Im}\phi_\lambda$. 很容易验证如果 $\lambda \neq \mu$, 那么 $\mathrm{Im}\phi_\lambda \neq \mathrm{Im}\phi_\mu$. 因此我们已经建立个无限多个符合要求的 $\mathbb{C}G$-子模 $\mathrm{Im}\phi_\lambda$.

6. V 是不可约的, 用例 5.5(2) 或者习题 8.4 的方法得到.

令 $u_1 = 1 - ia - a^2 + ia^3, u_2 = b - iab - a^2b + ia^3b$. 那么 $sp(u_1, u_2)$ 是 $\mathbb{C}G$ 的一个 $\mathbb{C}G$-子模, 它同构于 V, 且它们之间建立的 $\mathbb{C}G$-同构映射是:$v_1 \mapsto u_1, v_2 \mapsto u_2$.

第 11 章

1. 因为 G 是非交换群, 不是所有的次数都为 1(见命题 9.18). 因此由定理 11.12, 次数是 1,1,2.

2. 与例 11.13 相比较我们看到可能的解有 $1^{12}, 1^8 2, 1^4 2^2, 1^3 3$(其中 1^{12} 表示 12 个 1, $1^8 2$ 表示 8 个 1 和一个 2, 其他同理). 后面 (习题 15.4 和 17.3) 我们将会看到 $1^8 2$ 这种情况不可能出现.

由习题 5.3 我们知道 D_{12} 至少有 2 个次数为 2 的不等价的不可约的表示. 因此对于 D_{12} 来说答案是 $1^4 2^2$.

3. 对于每个 $g \in G$, 定义 $\phi_g : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ 为 $r\phi_g = gr$ $(r \in \mathbb{C}G)$. 那么 $\{\phi_g : g \in G\}$ 给出了 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)$ 的一组基 (与命题 11.8 的证明相比较).

4. 令 $v_1, ... v_n$ 是 V 的一组自然基. 那么 $sp(v_1 + ... + v_n)$ 是 V 的唯一的平凡 $\mathbb{C}G$-子模 (与习题 10.1 相比较). 因此由推论 11.6 有 $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, U)) = 1$.

5. 令 v_1, w_2 是在例 10.8(2) 中出现的 U_3 的一组基. 定义 ϑ_1, ϑ_2 为 $r\vartheta_1 = v_1 r, r\vartheta_2 = w_2 r (r \in \mathbb{C}G)$. 那么由命题 11.8 的证明我们知道 ϑ_1, ϑ_2 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U_3)$ 的一组基. 同时定义 ϕ_1, ϕ_2 为 $u\phi_1 = u, u\phi_2 = bu (u \in U_3)$. 那么 ϕ_1, ϕ_2 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_3, \mathbb{C}G)$ 的一组基.

6. 令 $V = X_1 \oplus ... \oplus X_r, W = Y_1 \oplus ... \oplus Y_s$, 其中 X_a, Y_b 是不可约的 $\mathbb{C}G$-模. 那么由 (11.5)(3) 和命题 11.2 我们知道 $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W))$ 等于使得 $X_a \cong Y_b$ 的序对 (a, b) 的数量. 这反过来又等于

$$\sum_{i=1}^{k} |\{(a, b) : X_a \cong Y_b \cong V_i\}|.$$

现在由推论 11.6 知道使得 $X_a \cong V_i$ 的整数 a 的数量是 $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,V_i)) = d_i$, 同理使得 $Y_b \cong V_i$ 的整数 b 的数量是 e_i. 因此有 $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,W)) = \sum_{i=1}^{k} d_i e_i$.

第 12 章

1. 假设 $g,h \in C_G(x)$. 那么 $gx = xg, hx = xh$, 所以 $h^{-1}x = xh^{-1}, gh^{-1}x = gxh^{-1} = xgh^{-1}$, 因此有 $gh^{-1} \in C_G(x)$. 同时 $1x = x1$, 所以 $1 \in C_G(x)$. 因此 $C_G(x)$ 是 G 的一个子群.

如果 $z \in Z(G)$, 那么对于所有的 $g \in G$ 来说有 $zg = gz$, 所以有 $zx = xz, z \in C_G(x)$.

2. 注意到 $x \in C_G(g) \Leftrightarrow x \in C_G(gz)$. 再由定理 12.8 就可以得到结果.

3. (a) $(12)^G = \{(i,j) : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ 集合的大小是 C_n^2. 中心化子 $C_G((12))$ 包含元素 x 和 $(12)x$, 其中 x 是一个固定 1 和 2 的置换. 因此 $|C_G((12))| = 2 \cdot (n-2)!$, 这与定理 12.8 是一致的 (因为 $C_n^2 = n!/(2 \cdot (n-2)!)$).

(b) $(123)^G$ 包含所有的 3- 轮换型 (ijk). 对于无序的 i,j,k 来说存在 C_n^3 种选择. 每种选法给出了两个 3- 轮换型, 即 $(ijk),(ikj)$.

$(12)(34)^G$ 包含了所有的形为 $(ij)(kl)$ 的置换, 其中 i,j,k,l 是不同的. 对于无序的 i,j,k,l 来说存在 C_n^4 种选择. 每种选法给出了 3 个置换, 即 $(ij)(kl),(ik)(jl),(il)(jk)$.

(c) $(123)(456)^G$ 包含了所有的形为 $(1ij)(klm)$ 的置换, 其中 i,j,k,l,m 是不同的. i 有 5 种选法, j 有 4 种选法, 那么我们可以从剩下的数字中找到两个不同的 3-轮换型 (klm) 和 (kml). 这样给出了总共 $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ 个元素.

$(12)(34)(56)^G$ 包含了所有的形为 $(1i)(jk)(lm)$ 的置换, i 有 5 种选法, 那么我们可以从剩下的数字中找到 3 个 (2,2). 轮换型 $(jk)(lm),(jl)(km)$ 和 $(jm)(kl)$. 因此 $|(12)\ (34)(56)^G| = 5 \cdot 3 = 15$.

S_6 的共轭类的大小在下面的表格中给出:

轮换型	(1)	(2)	(3)	(2^2)	(4)	(3,2)
类大小	1	15	40	45	90	120

轮换型	(5)	(2^3)	(3^2)	(4,2)	(6)
类大小	144	15	40	90	120

4. 轮换型 (5) 中的一个元素 x 有 $C_{S_6}(x) = \langle x \rangle$(注意到 $|x^{S_6}| = 144$, 再利用定理 12.8). 因此由命题 12.17 有 $x^{A_6} \neq x^{S_6}$. 对于其他的轮换型中的元素 g 来说有 $g^{A_6} = g^{S_6}$.

5. 由例 12.18(2) 我们知道 A_5 的共轭类的大小是 1,12,12,15,20. 如果 H 是 A_5 的一个正规子群, 那么 $\|\cdot\|$ 整除 60, $1 \in H$, 并有 H 是 A_5 的共轭类的并. 因此 $|H| = 1$ 或 60, 从而 A_5 是单群.

6. 我们有 $Q_8 = \langle a,b : a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Q_8 的共轭类是

$$\{1\}, \{a^2\}, \{a, a^3\}, \{b, a^2b\}, \{ab, a^3b\},$$

$Z(\mathbb{C}Q_8)$ 的一组基是

$$1, a^2, a + a^3, b + a^2b, ab + a^3b.$$

7. 由类方程有

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|.$$

(a) 对于 $x_i \notin Z(G)$, 由定理 12.8 和 (12.9) 我们有 $|x_i^G|$ 整除 p^n 且 $|x_i^G| \neq 1$. 因此 p 整除 $|x_i^G|$. 所以有 p 整除 $|Z(G)|$, 即 $Z(G) \neq \{1\}$.

(b) 如果 G 的任意一个共轭类的大小都不是 p, 那么对于所有的 $x_i \notin Z(G)$, 有 p^2 整除 $|x_i^G|$. 如果还有 $|G| \geqslant p^3$ 的话, 那么由类方程有 p^2 整除 $|Z(G)|$, 矛盾.

第 13 章

1. ρ_i 的特征标 $\chi_i (i = 1, 2)$ 如下:

	1	a^3	a, a^5	a^2, a^4	b, a^2b, a^4b	ab, a^3b, a^5b
χ_1	2	2	-1	-1	0	0
χ_2	2	0	0	2	0	-2

同时 $\mathrm{Ker}\rho_1 = \{1, a^3\}, \mathrm{Ker}\rho_2 = \{1, a^2, a^4\}$.

2. 令 $C_4 = \langle x : x^4 = 1 \rangle$. C_4 的不可约的特征标如下:

	1	x	x^2	x^3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

有 $\chi_{\mathrm{reg}} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$.

3. 因为 $\chi(g) = |\mathrm{fix}(g)|$, 有 $\chi((12)) = 5, \chi((16)(235)) = 2$.

4. 如果 χ 是一个非零的特征标同时也是一个同态, 那么 $\chi(1) = \chi(1^2) = (\chi(1))^2$, 所以有 $\chi(1) = 1$.

5. 令 ρ 是一个特征标为 χ 的表示. 那么由命题 9.14 我们知道存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $z\rho = \lambda I$. 因此, 对于所有的 $g \in G$, 有 $(zg)\rho = (z\rho)(g\rho) = \lambda(g\rho)$, 因此有 $\chi(zg) = \lambda\chi(g)$. 从而有 $I = 1\rho = z^m\rho = (z\rho)^m = \lambda^m I$, 所以 $\lambda^m = 1$.

6. 令 ρ 是一个特征标为 χ 的表示. 如果 $g \in Z(G)$, 那么由命题 9.14 我们知道存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $g\rho = \lambda I$. 反过来, 如果存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $g\rho = \lambda I$, 那么对于任意的 $h \in G$, 有 $(g\rho)(h\rho) = (h\rho)(g\rho)$, 又因为 ρ 是忠实表示, 所以 $g \in Z(G)$.

我们现在已经证明了存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $g\rho = \lambda I$ 当且仅当 $g \in Z(G)$. 那么由定理 13.11(1) 就可以得到想要的结果.

7. (a) 对于所有的 $g, h \in G, \det((gh)\rho) = \det((g\rho)(h\rho)) = \det(g\rho)\det(h\rho)$. 因此 $g \mapsto (\det(g\rho))$ 是 G 在 $\mathbb{C}$ 上的一个次数为 1 的表示, 所以 δ 是 G 的一个线性特征标.

(b) 由定理 1.10 有 $G/\mathrm{Ker}\delta \cong \mathrm{Im}\delta$, 并且 $\mathrm{Im}\delta$ 是非零复数组成的乘法交换群 $\mathbb{C}^*$ 的一个子群. 因此 $G/\mathrm{Ker}\delta$ 是交换群.

(c) $\mathrm{Im}\delta$ 是 $\mathbb{C}^*$ 的一个有限的子群, 因此由习题 1.7 可知它是循环群. 同时有 $-1 \in \mathrm{Im}\delta$, 所以 $\mathrm{Im}\delta$ 是偶数阶的. 因此 $\mathrm{Im}\delta$ 包含一个指数为 2 的子群 H. 很容易验证 $\{g \in G : \delta(g) \in H\}$ 是一个指数为 2 的正规子群.

8. 令 ρ 是 G 的正则表示, 像习题 7 中一样定义 δ. 由习题 1.8 我们知道 G 有一个阶为 2 的元素. 对 $\mathbb{C}G$ 的自然基 $g_1, \ldots, g_{2k}$ 重新排序得到一组基 $\mathscr{B}$ 从而使得对于任意的 $g \in G$ 有 g 和 gx 是相邻的, 那么

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

有 k 个块

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

因为 k 是奇数, $\det([x]_{\mathscr{B}}) = (-1)^k = -1$. 因此有 $\delta(x) = -1$. 接着由上面的习题 7 就可以得到想要的结果.

9 令 V 是特征标为 χ 的一个 $\mathbb{C}G$-模. 我们选择 V 的一组基 $\mathscr{B}$ 使得 $[g]_{\mathscr{B}}$ 是对角阵, 并且对角线元素都是 ± 1(见 (9.10)). 假设这个矩阵有 r 个 1 和 s 个 -1. 像在习题 7 中一样定义 δ. 如果 s 是奇数, 那么 $\delta(g) = -1$, 那么由习题 7 我们知道 G 有一个指数为 2 的正规子群. 并且如果 s 是偶数, 那么 $-s \equiv s \bmod 4$, 所以 $\chi(g) = r - s \equiv r + s = \chi(1) \bmod 4$.

10. 因为 $x \neq 1$, 有 $\chi_{\mathrm{reg}}(x) \neq \chi_{\mathrm{reg}}(1)$(见命题 13.20), 所以由定理 13.19 我们知道存在 G 的某个不可约的特征标 χ_i, 有 $\chi_i(x) \neq \chi_i(1)$.

第 14 章

1. 应用命题 14.5(2) 有

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{3 \cdot 3}{24} + \frac{(-1)(-1)}{4} + 0 + \frac{3 \cdot 3}{8} + \frac{(-1)(-1)}{4} = 2,$$

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{3 \cdot 3}{24} + \frac{(-1) \cdot 1}{4} + 0 + \frac{3 \cdot (-1)}{8} + \frac{(-1)(-1)}{4} = 0,$$

$$\langle\psi,\psi\rangle=\frac{3\cdot3}{24}+\frac{1\cdot1}{4}+0+\frac{(-1)\cdot(-1)}{8}+\frac{(-1)(-1)}{4}=1.$$

因此由定理 14.20 可知 ψ 是不可约的 (但 χ 不是).

2. 令 χ_i 是 $\rho_i(i=1,2,3)$ 的特征标. 这些特征标的值如下:

共轭类	1	a^2	a,a^3	b,a^2b	ab,a^3b
χ_1	2	-2	0	0	0
χ_2	2	-2	0	0	0
χ_3	2	2	0	0	-2

由定理 14.21 我们知道 ρ_1 和 ρ_2 是等价的, 但是 ρ_3 并不等价于 ρ_1 或 ρ_2.

3. 由命题 13.2 我们知道表示 ρ 和 σ 有相同的特征标, 因此由定理 14.21 我们知道 ρ 和 σ 是等价的, 这给出了要求的矩阵 T.

4. 令 χ_1 是 G 的平凡的特征标. 那么

$$\langle\chi,\chi_1\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g).$$

因为 $\chi(1)>0$, 且由假设我们知道对于任意的 $g\in G$, 有 $\chi(g)\geqslant0$, 从而可知 $\langle\chi,\chi_1\rangle\neq0$. 因为 $\chi\neq\chi_1$, 由定理 14、17 我们知道 χ 是可约的.

5. 有

$$\langle\chi_{\rm reg},\chi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\rm reg}(g)\overline{\chi(g)}.$$

但是在 $g=1$ 的情况下有 $\chi_{\rm reg}=|G|$, 在 $g\neq1$ 的情况下有 $\chi_{\rm reg}=0$. 因此有 $\langle\chi_{\rm reg},\chi\rangle=\chi(1)$.

6. 由习题 11.4 和定理 14.24 立刻就可以得到结论.

7. 回忆 $\langle\psi,\psi\rangle=\sum_{i=1}^{k}d_i^2$. 因此如果 $\langle\psi,\psi\rangle=a$, 其中 $a=1,2,3$, 那么 a 就是 $d_i=1$ 的个数 (其余 d_i 是 0). 如果 $\langle\psi,\psi\rangle=4$, 那么或者有 4 个 d_i 是 1(其余是 0), 或者只有一个 d_i 是 2, 其余是 0.

8. 不是. 令 $G=C_2$ 且 $\chi=\chi_{\rm reg}$ 其中 $\chi_{\rm reg}$ 为 C_2 的正则特征标.

第 15 章

1.

$$\langle\chi,\chi_1\rangle=\frac{1}{6}(19\cdot1+3\cdot(-1)\cdot1+2\cdot(-2)\cdot1)=2,$$
$$\langle\chi,\chi_2\rangle=\frac{1}{6}(19\cdot1+3\cdot(-1)(-1)+2\cdot(-2)\cdot1)=3,$$
$$\langle\chi,\chi_3\rangle=\frac{1}{6}(19\cdot2+0+2\cdot(-2)\cdot(-1))=7.$$

因此有 $\chi=2\chi_1+3\chi_2+7\chi_3$. 因为所有的系数都是非负整数, 所以 χ 是 S_3 的一个特征标.

2. 由习题 1 中的方法, 有

$$\psi_1 = \frac{1}{6}\chi_1 + \frac{1}{6}\chi_2 + \frac{1}{3}\chi_3,$$
$$\psi_2 = \frac{1}{2}\chi_1 - \frac{1}{2}\chi_2,$$
$$\psi_3 = \frac{1}{3}\chi_1 + \frac{1}{3}\chi_2 - \frac{1}{3}\chi_3.$$

3. 我们发现 $\psi = -\chi_2 + \chi_3 + \chi_5 + 2\chi_6$. 因为 χ_2 的系数是一个负整数, 所以 ψ 不是 G 的特征标.

4. (a) 对于所有的群 G 来说, 如果 $x \in G$, 那么由 x 和 $Z(G)$ 中的元素生成的子群是交换群 (这是因为 $Z(G)$ 中的元素与 x 的任意幂次可以交换). 因此, 如果 $G = Z(G) \bigcup Z(G)x$, 那么 $G = Z(G)$. 因此一个群 G 的中心在 G 中的指数不可能是 2.

每个 12 阶的交换群有 12 个共轭类. 如果 $|G| = 12$, 并且 G 是非交换群, 那么 $|Z(G)| \mid 12$, 又 $|Z(G)| \neq 6$ 或 12, 所以 $Z(G) \leqslant 4$. 因此 G 至多有 4 个大小是 1 的共轭类 (见 (12.9)), 余下的共轭类的大小至少是 2, 所以不可能有 9 个共轭类.

(b) 因为不可约的表示的数量等于共轭类的个数, 所以由习题 11.2 的结论和 (a) 部分我们知道 G 有 4,6 或 12 个共轭类. 如果 G 是交换群 (也就是说 $G = C_4 \times C_3$), 那么 G 有 12 个共轭类, 如果 $G = D_{12}$, 那么 G 有 6 个共轭类 (见 (12.12)), 如果 $G = A_4$, 那么 G 有 4 个共轭类 (见例 12.18(1)).

第 16 章

1. 令 $C_2 \times C_2 = \{(1,1),(x,1),(1,y),(x,y) : x^2 = y^2 = 1\}$. $C_2 \times C_2$ 的特征标表是 (参考习题 9.1):

	(1,1)	$(x,1)$	$(1,y)$	(x,y)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

2. 特征标表的最后一行是 (参考例 16.5(2)):

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
χ_5	2	-2	0	0	0

3. G 的完整的特征标表是:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	10	5	5	2
χ_1	1	1	1	1
χ_2	2	$(-1+\sqrt{5})/2$	$(-1-\sqrt{5})/2$	0
χ_3	1	1	1	-1
χ_4	2	$(-1-\sqrt{5})/2$	$(-1+\sqrt{5})/2$	0

两个未知的特征标 χ_3, χ_4 的次数分别为 1,2, 这是因为 $\sum_{i=1}^{4}(\chi_i(1))^2 = 10$. 因为 g_4 的阶是 2, 由推论 13.10 和 $\sum_{i=1}^{4}\chi_i(1)\overline{\chi_i(g_4)} = 0$ 我们知道特征标在 g_4 上的值. 那么 $\sum_{i=1}^{4}\chi_i(g_2) \cdot \overline{\chi_i(g_4)} = 0$ 告诉我们 $\chi_3(g_2) = 1$, 同理有 $\chi_3(g_3) = 1$. 最后 $\sum_{i=1}^{4}\chi_i(1)\overline{\chi_i(g_2)} = 0$ 告诉我们 $\chi_4(g_2) = (-1-\sqrt{5})/2$, 同理有 $\chi_4(g_3) = (-1+\sqrt{5})/2$.

4. (a) $\sum_{i=1}^{5}\chi_i(g_1)\overline{\chi_i(g_2)} = 0$ 告诉我们 $3+3\zeta+3\overline{\zeta}=0$, 并且由 $\sum_{i=1}^{5}\chi_i(g_2)\overline{\chi_i(g_2)} = 7$ 我们知道 $3+2\zeta\overline{\zeta}=7$ 因此 $\zeta = (-1 \pm i\sqrt{7})/2$.

(b) 包含 g_2^{-1} 的共轭类所对应的列的特征标值是包含 g_2 的共轭类所对应的列的特征标值的复共轭 (见命题 13.9(3)), 因为 ζ 不是实数, 所以 g_2 和 g_2^{-1} 对应的列不是同一列.

5. 令 $g \in G$. 对 g 所在的列使用列正交关系, 有 $\sum_{i=1}^{k}\chi_i(g)\overline{\chi_i(g)} = |C_G(g)|$. 而 $|C_G(g)| = |G|$ 当且仅当 $C_G(g) = G$, 当且仅当 $g \in Z(G)$.

6. 矩阵 $\overline{C}$ 是对 C 进行列的重新排列得到的 (见命题 13.9(3)). 因此 $\det\overline{C} = \pm\det C$, 如果 $\det\overline{C} = \det C$, 那么 $\det C$ 是实数, 如果 $\det\overline{C} = -\det C$, 那么 $\det C$ 是纯虚数.

由列正交关系, $\overline{C}^t C$ 是 $k \times k$ 阶的对角阵, 对角线元素是 $|C_G(g_i)|(1 \leqslant i \leqslant k)$. 因此有 $|\det C|^2 = \prod |C_G(g_i)|$.

如果 $G = C_3$, 那么 $\det C = \pm i3\sqrt{3}$(正负号取决于行和列的排列顺序).

第 17 章

1. (a) Q_8的共轭类为 $\{1\}, \{a^2\}, \{a, a^3\}, \{b, a^2b\}$ 和 $\{ab, a^3b\}$.

(b) $G' = \{1, a^2\}$, 且 $G/G' = \{G', G'a, G'b, G'ab\} \cong C_2 \times C_2$. 而 $C_2 \times C_2$ 的特征标表在习题 16.1 的解答中已经给出. 因此, G 的线性特征标为

g_i	1	a^2	a	b	ab
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	8	8	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1

(c) 利用列正交关系, G 的最后一个不可约特征标为

	1	a^2	a	b	ab
χ_5	2	-2	0	0	0

2. 容易看出 $a^7 = b^3 = 1$. 利用命题 12.13 很容易看出 $b^{-1}ab = a^2$.

(a) 根据上面的关系知, G 的每个元素都有形式 $a^m b^n$, 其中 $0 \leqslant m \leqslant 6$, $0 \leqslant n \leqslant 2$; 因此 $|G| \leqslant 21$. 而 a 为 7 阶, b 为 3 阶, 所以根据拉格朗日定理 21 整除 $|G|$. 所以 $|G| = 21$.

(b) G 的共轭类为 $\{1\}, \{a, a^2, a^4\}, \{a^3, a^5, a^6\}, \{a^m b : 0 \leqslant m \leqslant 6\}$ 和 $\{a^m b^2 : 0 \leqslant m \leqslant 6\}$.

(c) 首先, $G' = \langle a \rangle$, 所以我们能得到 G 的三个线性特征标:

g_i	1	a	a^3	b	b^2
$\|C_G(g_i)\|$	21	7	7	3	3
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	1	ω^2	ω

其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$. 接着要找剩下的两个不可约特征标 χ_4 和 χ_5, 我们知道 a 与 a^{-1} 不共轭, 所以存在某个不可约特征标 χ, 有 $\chi(a) \neq \overline{\chi}(a)$(参见推论 15.6). 因此 χ_4 和 χ_5 必互为共轭. 利用列正交关系, 得到

	1	a	a^3	b	b^2
χ_4	3	α	$\overline{\alpha}$	0	0
χ_5	3	$\overline{\alpha}$	α	0	0

其中 $\alpha = (-1 + i\sqrt{7})/2$.

3. 根据定理 17.11, G 的线性特征标的数量可以整除 $|G|$, 参考习题 11.2 的解答, 知道只可能有 3, 4 或 12 个线性特征标. 如果有 12 个, 那么 G 是交换群 (参见命题 9.18), 所以 G 不是单群. 若 G 有 3 个或 4 个线性特征标, 那么 $|G/G'| = 3$ 或 4, 因为 $G' \lhd G$, 所以 G 仍不是单群.

4. 在下面的特征标表中, 有 $\chi_1 = 1_G, \chi_2 = \chi, \chi_3 = \chi^2, \chi_4 = \chi_2\chi_3$, $\chi_5 = \phi$, $\chi_6 = \phi\chi$; 根据命题 17.14, 这些都是不可约特征标. 中心化子的阶可以通过正交关系得到, $|g_i^G|$ 通过方程 $|G| = |C_G(g_i)||g_i^G|$(参见定理 12.8) 可以得到.

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
$\|C_G(g_i)\|$	12	4	4	6	6	12
$\|g_i^G\|$	1	3	3	2	2	1
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	$-i$	i	1	-1	-1
χ_3	1	-1	-1	1	1	1
χ_4	1	i	$-i$	1	-1	-1
χ_5	2	0	0	-1	-1	2
χ_6	2	0	0	-1	1	-2

5. D_8 的正规子群为

$$\begin{aligned}
&D_8=\mathrm{Ker}\chi_1, \quad \langle a\rangle=\mathrm{Ker}\chi_2,\\
&\langle a^2,b\rangle=\mathrm{Ker}\chi_3, \quad \langle a^2,ab\rangle=\mathrm{Ker}\chi_4,\\
&\langle a^2\rangle=\mathrm{Ker}\chi_2\cap\mathrm{Ker}\chi_3, \quad \{1\}=\mathrm{Ker}\chi_5.
\end{aligned}$$

6. (a) 验证给定的矩阵满足相关关系:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix}^{2n}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \varepsilon^n & 0\end{pmatrix}^{2},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \varepsilon^n & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ \varepsilon^n & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix}^{-1}.$$

因此得到 T_{4n} 的表示 (参见例 1.4).

(b) 根据习题 8.4, 在 (a) 中的表示是不可约的, 除非 $\varepsilon=\pm1$. 对 $\varepsilon=e^{2\pi ir/2n}$, 其中 $r=1,2,\ldots,n-1$, 我们就得到了 $n-1$ 个不可约表示, 且因为它们的特征标互不相同, 所以任意两个表示不等价. 另外, $G'=\langle a^2\rangle$, 所以 $|G/G'|=4$ 且有 4 个次数为 1 的表示 (参见定理 17.11). 目前找到的不可约表示的次数的平方和为

$$(n-1)\cdot2^2+4\cdot1^2=4n.$$

因此根据定理 11.12, 我们就找到了所有的不可约表示. (关于次数为 1 的不可约表示的更多细节可以参看习题 18.3 的解答; 注意到 G/G' 的结构依赖于 n 的奇偶.)

7. (a) 验证给定矩阵满足相关关系.

(b) 对 $\varepsilon=e^{2\pi ik/2n}$, 其中 $k=0,1,2,\ldots,n-1$, 给定的表示是不可约的 (习题 8.4) 且不等价的 (考虑特征标在 a^2 上的取值). 且 $G'=\langle b\rangle$, 所以 $|G/G'|=2n$ 且有 $2n$ 个次数为 1 的表示. 目前找到的不可约表示的次数的平方和为

$$n\cdot2^2+2n\cdot1^2=6n,$$

所以我们就找到了所有的不可约表示.

8. (a) 验证给定矩阵满足相关关系.

(b) 对 $\varepsilon=e^{2\pi ij/n}$, 其中 $j=0,1,2,\ldots,n-1$, 给定的表示是不可约的 (习题 8.4) 且不等价的 (特征标互不相同). 注意到 b^2 不在这些表示的核中.

有另一表示

$$a\mapsto\begin{pmatrix}\eta & 0\\ 0 & \eta^{-1}\end{pmatrix}, \quad b\mapsto\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

其中 η 为 $\mathbb{C}$ 中的任一 $2n$ 次单位根. 对 $\eta=e^{2\pi ij/2n}$, 其中 $j=1,2,\ldots,n-1$, 这些表示是不可约的且不等价的. 并且因为 b^2 在这些表示的核中, 所以它们与之前找到的任意一个表示都是不等价的.

最后, $G'=\langle a^2,b^2\rangle$ 且 $G/G'\cong C_2\times C_2$, 所以得到了 4 个次数为 1 的表示.

我们目前找到的不可约表示的次数的平方和为

$$n \cdot 2^2 + (n-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 1^2 = 8n,$$

所以我们就找到了所有的不可约表示.

第 18 章

1. D_8 的特征标表如下所示:

g_i	1	a^2	a	b	ab
$\|C_G(g_i)\|$	8	8	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

(参见例 16.3(3) 或 18.3). 把 D_8 看做一个正方形的对称群, 取 b 为关于正方形对角线的一个反射. π 取值如下:

	1	a^2	a	b	ab
π	4	0	0	2	0

因此 $\pi = \chi_1 + \chi_3 + \chi_5$. (与例 14.28(2) 对照, 在那里面我们取 b 为不同的反射.)

2. 令 $\omega = e^{2\pi i/6}$. 那么 $\omega + \omega^{-1} = 1, \omega^2 + \omega^{-2} = \omega^4 + \omega^{-4} = -1$. 因此利用 18.3, D_{12} 的特征标表如下:

g_i	1	a^3	a	a^2	b	ab
$\|C_G(g_i)\|$	12	12	6	6	4	4
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	-2	1	-1	0	0
χ_6	2	2	-1	-1	0	0

D_{12} 的 7 个正规子群为 $G = \mathrm{Ker}\chi_1, \langle a \rangle = \mathrm{Ker}\chi_2, \langle a^2, b \rangle = \mathrm{Ker}\chi_3, \langle a^2, ab \rangle = \mathrm{Ker}\chi_4$, $\langle a^2 \rangle = \mathrm{Ker}\chi_3 \cap \mathrm{Ker}\chi_4, \langle a^3 \rangle = \mathrm{Ker}\chi_6, \{1\} = \mathrm{Ker}\chi_5$.

3. G的 $n+3$ 个共轭类为

$$\{1\}, \{a^n\}, \{a^r, a^{-r}\}(1 \leqslant r \leqslant n-1), \{a^{2j}b : 0 \leqslant j \leqslant n-1\},$$
$$\{a^{2j+1}b : 0 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

从习题 17.6 中得到了 $n-1$ 个不可约特征标 $\psi_j(1 \leqslant j \leqslant n-1)$, 如下:

g_i	1	a^n	$a^r(1 \leqslant r \leqslant n-1)$	b	ab
$\|C_G(g_i)\|$	$4n$	$4n$	$2n$	4	4
ψ_j	2	$2(-1)^j$	$\omega^{rj}+\omega^{-rj}$	0	0

其中 $\omega = e^{2\pi i/2n}$.

剩下的 G 的 4 个不可约特征标都是线性特征标. 若 n 为奇数, 那么 $G/G' = \langle G'b \rangle \cong C_4$, 线性特征标为

g_i	1	a^n	$a^r(1 \leqslant r \leqslant n-1)$	b	ab
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	$(-1)^r$	i	$-i$
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	$(-1)^r$	$-i$	i

若 n 为偶数, 那么 $G/G' \cong C_2 \times C_2$, 线性特征标如下:

g_i	1	a^n	$a^r(1 \leqslant r \leqslant n-1)$	b	ab
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	$(-1)^r$	1	-1
χ_4	1	1	$(-1)^r$	-1	1

注意到 $T_4 \cong C_4, T_8 \cong Q_8$ 和 T_{12} 即为 18.4 中的例子.

4. G 的 $3n$ 个共轭类为

$$\{a^{2r}\}, \{a^{2r}b, a^{2r}b^2\}, \{a^{2r+1}, a^{2r+1}b, a^{2r+1}b^2\}(0 \leqslant r \leqslant n-1).$$

有 $G' = \langle b \rangle$ 且 $G/G' = \langle G'a \rangle \cong C_{2n}$. 因此得到了 $2n$ 个线性特征标 $\chi_j(0 \leqslant j \leqslant 2n-1)$. 习题 17.7 给出了 n 个不可约特征标 $\psi_k(0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

U_{6n} 的特征标表为

g_i	a^{2r}	$a^{2r}b$	a^{2r+1}
$\|C_G(g_i)\|$	$6n$	$3n$	$2n$
$\chi_j(0 \leqslant j \leqslant 2n-1)$	ω^{2jr}	ω^{2jr}	$\omega^{j(2r+1)}$
$\psi_k(0 \leqslant k \leqslant n-1)$	$2\omega^{2kr}$	$-\omega^{2kr}$	0

$\omega = e^{2\pi i/2n}$.

观察可知 $U_6 \cong D_6, U_{12} \cong T_{12}$ 且 $U_{18} \cong D_6 \times C_3$.

5. G 的 $2n+3$ 个共轭类为

$$\begin{aligned}&\{1\},\{b^2\},\{a^{2r+1},a^{-2r-1}b^2\}(0\leqslant r\leqslant n-1),\\&\{a^{2s},a^{-2s}\},\{a^{2s}b^2,a^{-2s}b^2\}(1\leqslant s\leqslant (n-1)/2),\\&\{a^jb^k:j\text{为偶数},k=1\text{或}3\},\\&\{a^jb^k:j\text{为奇数},k=1\text{或}3\}.\end{aligned}$$

利用习题 17.8, 得到 4 个线性特征标 $\chi_1,\ldots,\chi_4,n$ 个次数为 2 的特征标 $\psi_j(0\leqslant j\leqslant n-1)$, 和另外 $n-1$ 个次数为 2 的特征标 $\phi_j(1\leqslant j\leqslant n-1)$, V_{8n}的特征标表如下所示:

g_i $\lvert C_G(g_i)\rvert$	1 $8n$	b^2 $8n$	a^{2r+1} $(0\leqslant r\leqslant n-1)$ $4n$	a^{2s} $(1\leqslant s\leqslant (n-1)/2)$ $4n$	$a^{2s}b^2$ $(1\leqslant s\leqslant (n-1)/2)$ $4n$	b 4	ab 4
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	1	1	-1
χ_4	1	1	-1	1	1	-1	1
ψ_j $(0\leqslant j\leqslant n-1)$	2	-2	$\omega^{2j(2r+1)}$ $-\omega^{-2j(2r+1)}$	ω^{4js} $+\omega^{-4js}$	$-\omega^{4js}$ $-\omega^{-4js}$	0	0
ϕ_j $(1\leqslant j\leqslant n-1)$	2	2	$\omega^{j(2r+1)}$ $+\omega^{-j(2r+1)}$	ω^{2js} $+\omega^{-2js}$	ω^{2js} $+\omega^{-2js}$	0	0

其中 $\omega=e^{2\pi i/2n}$. 举个例子, 下面是 V_{24} 的特征标表:

g_i	1	b^2	a	a^3	a^5	a^2	a^2b^2	b	ab
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	24	12	12	12	12	12	4	4
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
ψ_0	2	-2	0	0	0	2	-2	0	0
ψ_1	2	-2	$i\sqrt{3}$	0	$-i\sqrt{3}$	-1	1	0	0
ψ_2	2	-2	$-i\sqrt{3}$	0	$i\sqrt{3}$	-1	1	0	0
ϕ_1	2	2	1	-2	1	-1	-1	0	0
ϕ_2	2	2	-1	2	-1	-1	-1	0	0

第 19 章

1. $\langle\chi\psi,\phi\rangle=\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\chi(g)\psi(g)\overline{\phi(g)}=\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\chi(g)\overline{\overline{\psi}(g)\phi(g)}=\langle\chi,\overline{\psi}\phi\rangle$. 类似地, $\langle\chi\psi,\phi\rangle=\langle\psi,\overline{\chi}\phi\rangle$.

2. 根据习题 1, $\langle\chi\psi,1_G\rangle=\langle\chi,\overline{\psi}\rangle$. 根据命题 13.15 和 (14.13) 即可得出结果.

3. 令 V 是特征标为 χ 的 $\mathbb{C}G$-模. 因为 χ 不是忠实的特征标, 存在 $1 \neq g \in G$ 使得对任意的 $v \in V$ 有 $vg = v$. 根据命题 15.5, 存在 G 的一个不可约特征标 ψ 使得 $\psi(g) \neq \psi(1)$. 令 n 为非负整数. 那么对任意的 $w \in V \otimes \ldots \otimes V$($n$ 个) 有 $wg = w$. 因此对任意的满足 $\langle \chi^n, \phi \rangle \neq 0$ 的不可约特征标 ϕ 有 $\phi(g) = \phi(1)$. 所以 $\langle \chi^n, \psi \rangle = 0$.

4. 注意到 $(12345)^2$ 与 (13452) 在 A_5 中共轭. 利用命题 19.14 得到

	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)
χ_S	15	0	3	0	0
χ_A	10	1	-2	0	0
ϕ_S	6	0	2	1	1
ϕ_A	3	0	-1	$(1+\sqrt{5})/2$	$(1-\sqrt{5})/2$

那么

$$\chi_S = \psi_1 + \psi_2 + 2\psi_3,$$
$$\chi_A = \psi_2 + \psi_4 + \psi_5,$$
$$\phi_S = \psi_1 + \psi_3,$$
$$\phi_A = \psi_4.$$

5. 下面记 χ 为 χ_5, χ_S 为 χ_4, χ_A 为 χ_2. 因为 $\langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1, i = 2, 4, 5$, 所以这些特征标是不可约的. 另外还有平凡特征标 $\chi_1, \chi_3 = \overline{\chi}_2, \chi_6 = \overline{\chi}_5$ 和 $\chi_7 = \chi_2\chi_5$; 根据命题 13.15 和 17.14 可知这些特征标为不可约特征标. 因为 G 有 7 个共轭类, 所以也就找到了所有的不可约特征标.

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	24	4	6	6	6	6
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2	ω^2	ω
χ_3	1	1	1	ω^2	ω	ω	ω^2
χ_4	3	3	-1	0	0	0	0
χ_5	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω	ω^2
χ_6	2	-2	0	$-\omega$	$-\omega^2$	ω^2	ω
χ_7	2	-2	0	-1	-1	1	1

其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$.

6. 取 $D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, $D_6 \times D_6$ 的特征标表如下所示:

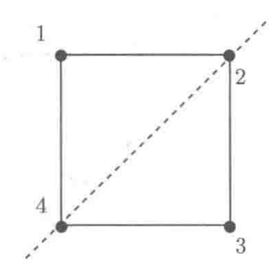
(g_i, h_j)	$(1,1)$	$(a,1)$	$(b,1)$	$(1,a)$	(a,a)	(b,a)	$(1,b)$	(a,b)	(b,b)
$\lvert C_G(g_i,h_j)\rvert$	36	18	12	18	9	6	12	6	4
$\chi_1 \times \chi_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_2 \times \chi_1$	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
$\chi_3 \times \chi_1$	2	-1	0	2	-1	0	2	-1	0

续表

(g_i,h_j)	$(1,1)$	$(a,1)$	$(b,1)$	$(1,a)$	(a,a)	(b,a)	$(1,b)$	(a,b)	(b,b)
$\|C_G(g_i,h_j)\|$	36	18	12	18	9	6	12	6	4
$\chi_1\times\chi_2$	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_2\times\chi_2$	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
$\chi_3\times\chi_2$	2	-1	0	2	-1	0	-2	1	0
$\chi_1\times\chi_3$	2	2	2	-1	-1	-1	0	0	0
$\chi_2\times\chi_3$	2	2	-2	-1	-1	1	0	0	0
$\chi_3\times\chi_3$	4	-2	0	-2	1	0	0	0	0

第 20 章

1. (a) 同例 1.1(3) 中一样, 把 D_8 看做 S_4 的一个与一个正方形的四个角可交换的一个子群. 取 b 为关于如下所示的轴的反射:



那么 $a\mapsto(1234), b\mapsto(13)$ 就是我们要求的同构.

(b) 同 18.1 一样, 取 S_4 的不可约特征标 $\chi_1,\ldots,\chi_5$, 且 H 的特征标表为

g_i	1	(13)(24)	(1234)	(13)	(12)(34)
$\|C_H(g_i)\|$	8	8	4	4	4
ψ_1	1	1	1	1	1
ψ_2	1	1	1	-1	-1
ψ_3	1	1	-1	1	-1
ψ_4	1	1	-1	-1	1
ψ_5	2	-2	0	0	0

(参见例 16.3(3) 或 18.3). 有

$$\chi_1\downarrow H=\psi_1,\quad \chi_2\downarrow H=\psi_4,\quad \chi_3\downarrow H=\psi_1+\psi_4,$$
$$\chi_4\downarrow H=\psi_3+\psi_5,\quad \chi_5\downarrow H=\psi_2+\psi_5.$$

2. 同例 19.17, 令 $\chi_1,\ldots,\chi_{11}$ 为 S_6 的不可约特征标. 利用 (20.13) 或直接计算, 我们可以知道 $\chi_i\downarrow A_6(i=1,3,5,7,9)$, 是 A_6 的互不相同的不可约特征标; 这也就是下面特征标表

中的 $\psi_1, \ldots, \psi_5$. 且 $\langle \chi_{11} \downarrow A_6, \chi_{11} \downarrow A_6 \rangle = 2$. 做类似例 20.14 的讨论, 可从 $\chi_{11} \downarrow A_6$ 得到两个不可约特征标, 记为 ψ_6 和 ψ_7. 下面就是 A_6 的特征标表:

g_i	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(13452)	(123)(456)	(1234)(56)
$\|C_{A_6}(g_i)\|$	360	9	8	5	5	9	4
ψ_1	1	1	1	1	1	1	1
ψ_2	5	2	1	0	0	-1	-1
ψ_3	10	1	-2	0	0	1	0
ψ_4	9	0	1	-1	-1	0	1
ψ_5	5	-1	1	0	0	2	-1
ψ_6	8	-1	0	α	β	-1	0
ψ_7	8	-1	0	β	α	-1	0

其中 $\alpha = (1+\sqrt{5})/2, \beta = (1-\sqrt{5})/2$.

3. 令 $\psi_1, \ldots, \psi_r$ 为 H 的不可约特征标, 那么 $\chi \downarrow H = d_1\psi_1 + \ldots + d_r\psi_r$, 其中 d_i 为非负整数. 因为每个 ψ_i 次数为 1, 不等式 (20.6) 给出

$$\chi(1) = d_1 + \ldots + d_r \leqslant d_1^2 + \ldots + d_r^2 \leqslant n.$$

4. 根据命题 20.5 有不等式 $\langle \chi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H \leqslant 3$. 记 $d = \langle \chi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H$. 比如 $d = 1$ 或 2, 取 $G = S_3$ 且 H 为 2 阶子群, χ 为 G 的次数为 d 的一个不可约的特征标. 当 $d = 3$, 取 $G = A_4, H = V_4, \chi$ 为 G 的次数为 3 的一个不可约的特征标 (参见 18.2).

5. 参看 (20.13). 因为在 S_7 的次数列表中 20 只能出现一次, 次数为 20 的不可约特征标在 A_7 上的限制必为两个不同的次数为 10 的不可约特征标之和. 从 S_7 剩下的 14 个不可约特征标在 A_7 上的限制, 我们至少得到 7 个 A_7 的不可约特征标; 且我们恰好能得到 7 个不可约特征标, 当且仅当这 14 个特征标在 A_7 上的限制是不可约的. 我们已经知道 A_7 仅有 9 个共轭类. 因此 A_7 的不可约特征标次数为

$$1, 6, 14, 14, 15, 10, 10, 21, 35.$$

第 21 章

1. (a) 令 $u = 1 - a^2 + b - a^2b$. 那么 $ua^2 = -u$ 且 $ub = u$. 故 $sp(u)$ 为 $\mathbb{C}H$ 的 $\mathbb{C}H$-子模.
(b) 因为 G 的每个元素是属于 H 或属于 Ha, 元素 u 和 ua 形成 $U \uparrow G$ 的一组基.
(c) U 的特征标 ψ 和 $U \uparrow G$ 的特征标 $\psi \uparrow G$ 如下给出:

	1	a^2	b	a^2b
ψ	1	-1	1	-1

	1	a^2	a	b	ab
$\psi \uparrow G$	2	-2	0	0	0

因为 $\langle \psi \uparrow G, \psi \uparrow G \rangle = 1$, 所以诱导模 $U \uparrow G$ 是不可约的.

2. 记 H 的特征标如下:

	1	(123)	(132)
ψ_1	1	1	1
ψ_2	1	ω	ω^2
ψ_3	1	ω^2	ω

其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$.

(a) $\chi_1 \downarrow H = \chi_2 \downarrow H = \psi_1, \chi_3 \downarrow H = \psi_2 + \psi_3, \quad \chi_4 \downarrow H = \chi_5 \downarrow H = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$.

(b) 利用 Frobenius 互反律, 有

$$\psi_1 \uparrow G = \chi_1 + \chi_2 + \chi_4 + \chi_5, \quad \psi_2 \uparrow G = \psi_3 \uparrow G = \chi_3 + \chi_4 + \chi_5.$$

3. 只需证明若 U 是 $\mathbb{C}H$ 的一个 $\mathbb{C}H$-子模, 那么 $\dim(U \uparrow G) = |G:H|\dim U$. 令 $Hg_j(1 \leqslant j \leqslant m)$ 为 H 在 G 中的互不相同的右陪集. 那么 $U(\mathbb{C}G) = Ug_1 + \ldots + Ug_m$, 其中 $Ug_j = \{ug_j : u \in U\}$. $Ug_1 + \ldots + Ug_m$ 为直和 (因为 Ug_j 中的元素为右陪集 Hg_j 中元素的线性组合). 且 $\dim(Ug_j) = \dim U$(因为 $u \mapsto ug_j(u \in U)$ 是一个向量空间的同构). 因此 $\dim(U \uparrow G) = \dim(U(\mathbb{C}G)) = m \dim U$.

4. 令 ϕ 为 G 的一个不可约特征标. 连续两次利用 Frobenius 互反律, 结合习题 19.1 的结果 (连续两次), 有

$$\begin{aligned}\langle(\psi(\chi \downarrow H)) \uparrow G, \phi\rangle_G &= \langle\psi(\chi \downarrow H), \phi \downarrow H\rangle_H = \langle\psi, (\overline{\chi}\phi) \downarrow H\rangle_H \\ &= \langle\psi \uparrow G, \overline{\chi}\phi\rangle_G = \langle(\psi \uparrow G)\chi, \phi\rangle_G.\end{aligned}$$

因为对 G 的任意不可约特征标 ϕ 上式均成立, 从定理 14.17 我们可以推出 $(\psi(\chi \downarrow H)) \uparrow G = (\psi \uparrow G)\chi$.

5. 命题 21.23 给定了 $\phi \uparrow G$ 和 $\psi \uparrow G$ 的值. 在轮换型 $(1), (7)$ 和 $(3,3)$ 上的元素上的取值如下, 在其他元素上取值为零.

轮换型	(1)	(7)	(3, 3)
$\phi \uparrow G$	240	2	12
$\psi \uparrow G$	720	-1	0

6. 根据 Frobenius 互反律, 有 $|G:H|\psi(1) = d_1\chi_1(1) + \ldots + d_k\chi_k(1)$, 其中

$$d_i = \langle\psi \uparrow G, \chi_i\rangle_G = \langle\psi, \chi_i \downarrow H\rangle_H.$$

因为 ψ 不可约, 因此 $\chi_i \downarrow H = d_i\psi + \beta$, 其中 β 是 H 的一个特征标或 $\beta = 0$. 这样, $\chi_i(1) \geqslant d_i\psi(1)$, 且有

$$|G:H|\psi(1) \geqslant (d_1^2 + \ldots + d_k^2)\psi(1).$$

结论得证.

7. 利用习题 6 的结果, 同命题 20.9 的证明一样, 可以推出

(1) $\psi \uparrow G$ 是不可约的, 或者

(2) $\psi \uparrow G$ 为两个次数相等的不同的不可约的特征标之和.

假设 $\psi \uparrow G$ 为不可约的, 记 $\psi \uparrow G = \chi$. 根据 Frobenius 互反律, 有 $\chi(1) = 2\psi(1)$ 且 $\langle \chi \downarrow H, \psi \rangle_H = 1$; 因此 $\chi \downarrow H$ 是可约的, 记 $\chi \downarrow H = \psi + \phi$. 现在假设 ψ' 是 H 的不可约特征标. 有

$$\langle \psi' \uparrow G, \chi \rangle_G \neq 0 \Leftrightarrow \langle \psi', \chi \downarrow H \rangle_H \neq 0 \Leftrightarrow \psi' = \psi \text{或} \phi.$$

这样, 若 $\psi \uparrow G$ 是不可约的, 那么有且仅有 H 的特征标 $\phi(\phi \neq \psi)$ 有 $\psi \uparrow G = \phi \uparrow G$ (与命题 20.11 比较).

假设 $\psi \uparrow G$ 可约, 记 $\psi \uparrow G = \chi_1 + \chi_2$. 那么 $\chi_1(1) = \psi(1)$ 和 $\langle \chi_1 \downarrow H, \psi \rangle_H = 1$; 因此 $\chi_1 \downarrow H = \psi$. 现假设 ψ' 为 H 的一个不可约特征标. 有

$$\langle \psi' \uparrow G, \chi_1 \rangle_G \neq 0 \Leftrightarrow \langle \psi', \chi_1 \downarrow H \rangle_H \neq 0 \Leftrightarrow \psi' = \psi.$$

这样, 若 $\psi \uparrow G = \chi_1 + \chi_2$, 其中 χ_1 和 χ_2 为 G 的不可约特征标, ψ' 为 H 的一个不可约特征标, 使得 χ_1 或 χ_2 为 $\psi' \uparrow G$ 的一个成份, 那么 $\psi' = \psi$ (与命题 20.12 比较).

第 22 章

1. 线性特征标的数量可以整除 15(定理 17.11), 且不可约特征标次数的平方和等于 15(定理 11.12); 另外, 每个不可约特征标的次数均整除 15(定理 22.11). 因此每个不可约特征标次数均为 1, 根据命题 9.18, 所以 G 是交换的.

2. 再次利用定理 11.12,17.11 和 22.11. 每个不可约特征标的次数为 1 或 2, 且若有 r 个次数为 1 的特征标,s 个次数为 2 的特征标, 那么

$$r \mid 16, \quad \text{且 } r \cdot 1^2 + s \cdot 2^2 = 16.$$

因此 $r = 4$ 或 8 或者 16, 且 $r + s = 7$ 或 10 或 16.

3. (a) 因为 G 非交换, 不是所有的不可约特征标次数为 1(命题 9.18). 定理 11.12,17.11 和 22.11 说明存在 r 个次数为 1 的不可约特征标, s 个次数为 q 的不可约特征标, 其中

$$r \mid pq, \quad 1 \leqslant s \text{且} r + sq^2 = pq.$$

因此 $r = q$ 且 $s = (p-1)/q$.

(b) 根据定理 17.11 得 $|G'| = p$.

(c) G 的共轭类个数为 $r + s$.

(关于 pq 阶群的更多信息, 参见第 25 章).

4. (a) 根据假设, 存在 $a, b \in \mathbb{C}$ 使得对任意的 $g \neq 1$ 有 $\phi(g) = a$ 且 $\phi(1) = a + b|G|$. 因为等式在 G 上所有的元素上取值一样, 那么 $\phi = a1_G + b\chi_{\text{reg}}$.

(b) 有

$$\langle 1_G, \phi \rangle = \frac{1}{|G|}(a + b|G| + (|G| - 1)a) = a + b,$$

$$\langle \chi_{\text{reg}}, \phi \rangle = \frac{1}{|G|}|G|(a + b|G|) = a + b|G|.$$

因为 ϕ 为特征标, $\langle 1_G, \phi\rangle$ 和 $\langle \chi_{\text{reg}}, \phi\rangle$ 都是整数.

(c) 若 χ 是 G 的非平凡不可约特征标, 那么 $\langle \phi, \chi\rangle \in \mathbb{Z}$ 且 $\langle 1_G, \chi\rangle = 0$. 因此 $\langle \phi - a1_G, \chi\rangle \in \mathbb{Z}$. 但 $\langle \phi - a1_G, \chi\rangle = \langle b\chi_{\text{reg}}, \chi\rangle = b|G|\chi(1)/|G| = b\chi(1)$.

(d) 因为 $\chi(1)$ 整除 $|G|$, 部分 (c) 意味着 $b|G|$ 是一个整数. 根据 (b), 所以 a 和 b 都是整数.

5. (a) 根据拉格朗日定理, 若 $g \in G$ 那么 g 为奇阶元. 所以若 $g^2 = 1$, 那么 $g = 1$.

(b) 对任意的 $g \in G$, 有 $\chi(g) + \chi(g^{-1}) = \chi(g) + \overline{\chi}(g) = 2\chi(g)$, 且 $\chi(g)$ 是一个代数整数. 通过把每个元素和其逆放在一起, 进而把 $G\backslash\{1\}$ 划分为子集. 根据 (a), 每个子集大小均为 2. 因此存在某个代数整数 α 有

$$\sum_{g\in G} \chi(g) = \chi(1) + 2\alpha.$$

因为

$$\langle \chi, 1_G\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi(g),$$

所以结果成立.

(c) 若在 (b) 中 $\chi \neq 1_G$, 那么 $\langle \chi, 1_G\rangle = 0$, 因此 $\alpha = -\chi(1)/2$. 但 $-\chi(1)/2$ 为一个不是整数的有理数 (因为 $\chi(1)$ 整除 $|G|$, 因此其为奇数). 这与命题 22.5 矛盾. 这样 $\chi = 1_G$.

(关于使得 $\chi = \overline{\chi}$ 的 χ 的更多的分析在定理 23.1 和推论 23.2 中体现.)

6. (a) 根据定理 22.16, 对任意的特征标 χ, $\chi(g)$ 为整数. 令 $\chi_1, \ldots, \chi_7$ 为 G 的不可约特征标, 其中 $\chi_1 = 1_G$. 根据列正交关系, 有

$$(\text{I})\ 1 + \sum_{i=2}^{7} (\chi_i(g))^2 = 5 \quad 且 \quad (\text{II})\ 1 + \sum_{i=2}^{7} \chi_i(1)\chi_i(g) = 0.$$

从等式 (Ⅰ) 我们推出对任意的 i, $\chi_i(g) = 0, \pm 1$ 或者只有一个 i 有 $\chi_i(g) = \pm 2$, 而对其他所有 $i > 1$, $\chi_i(g) = 0$; 第二个可能性由等式 (Ⅱ) 可以排除.

(b) 从 (a) 可推出对 i 中的两个值有 $\chi_i(g) = 0$, 假设 $i = 2, 3$, 且对 $4 \leqslant i \leqslant 7$ 有 $\chi_i(g) = \pm 1$. 根据推论 22.27, $\chi_2(1) \equiv \chi_3(1) \equiv 0 \bmod 5$. 同时

$$(\text{III})\ \sum_{i=1}^{7} (\chi_i(1))^2 = 120.$$

因为 $5^5 + 10^2 > 120$, 我们推出 $\chi_2(1) = \chi_3(1) = 5$.

(c) 根据推论 22.27, 对任意的 i 有 $\chi_i(1) \equiv \chi_i(g) \bmod 5$, 且根据等式 (III) 有

$$(\text{IV})\ \sum_{i=4}^{7} (\chi_i(1))^2 = 69.$$

因此当 $4 \leqslant i \leqslant 7$ 的时候, 整数对 $(\chi_i(1), \chi_i(g))$ 可能的取值为 $(1, 1)$,$(4, -1)$,$(6, 1)$. 当 $4 \leqslant i \leqslant 7$ 时与等式 (Ⅳ) 一致的 $\chi_i(1)$ 的取值只能是 $1, 4, 4, 6$ (在某个顺序下).

(d) 现在 G 的特征标表已知如下部分:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
g_i的阶	1	2	2	3	4	6	5
$\|C_G(g_i)\|$	120	12	8	6	4	6	5
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	5						0
χ_3	5						0
χ_4	1						1
χ_5	4						−1
χ_6	4						−1
χ_7	6						1

我们将要计算特征标表剩下的几列. 而我们已经知道对任意的 i, j, $\chi_i(g_j)$ 都是整数.

(1) 首先, $\chi_i(g_4) \equiv \chi_i(1) \bmod 3$ 且 $\sum_{i=1}^{7}(\chi_i(g_4))^2 = 6$. 因此对 $1 \leqslant i \leqslant 7$, $\chi_i(g_4)$ 分别为 $1, -1, -1, 1, 1, 1, 0$.

(2) 其次, $\chi_i(g_5) \equiv \chi_i(1) \bmod 2$ 且 $\sum_{i=1}^{7}(\chi_i(g_5))^2 = 4$. 因此 $\chi_i(g_5) = \pm 1, 1 \leqslant i \leqslant 4$, 且 $\chi_i(g_5) = 0, 5 \leqslant i \leqslant 7$. 因为 $\sum_{i=1}^{7}\chi_i(1)\chi_i(g_5) = 0$, 可以推出 $\chi_4(g_5) = -1$ 且 (不失一般性)$\chi_2(g_5) = -\chi_3(g_5) = 1$.

(3) 因为 $\chi_i(g_3) \equiv \chi_i(1) \bmod 2$ 且 $\sum_{i=1}^{7}(\chi_i(g_3))^2 = 8$. 因此推出 $\chi_i(g_3) = \pm 1, 1 \leqslant i \leqslant 4$ 且 $\chi_i(g_3)(5 \leqslant i \leqslant 7)$ 的值为 $0, 0, \pm 2$(在某种顺序下). 同时 $\sum_{i=1}^{7}\chi_i(g_3)\chi_i(g_r) = 0, r = 4, 7$, 有 $\chi_i(g_3) = 1, 1 \leqslant i \leqslant 4$. 从关系 $\sum_{i=1}^{7}\chi_i(1)\chi_i(g_3) = 0$ 可以推出第三列从上到下的值为 $1, 1, 1, 1, 0, 0, -2$.

(4) 因为 $\chi_i(g_6) \equiv \chi_i(g_4) \bmod 2$ 且 $\sum_{i=1}^{7}(\chi_i(g_6))^2 = 6$. 所以 $\chi_i(g_6) = \pm 1, 1 \leqslant i \leqslant 6$ 且 $\chi_7(g_6) = 0$. 对第 6 列分别与第 3,4,5 和 7 列使用列正交关系有 $\chi_2(g_6) = -\chi_3(g_6) = \chi_4(g_6) = -1$ 且 (不失一般性)$\chi_5(g_6) = -\chi_6(g_6) = 1$.

(5) 现在只需求第二列的值. 这可以通过列正交关系得到.

G 的特征标表如下所示:

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
g_i的阶	1	2	2	3	4	6	5
$\|C_G(g_i)\|$	120	12	8	6	4	6	5
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	5	−1	1	−1	1	−1	0
χ_3	5	1	1	−1	−1	1	0

续表

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
g_i的阶	1	2	2	3	4	6	5
$\|C_G(g_i)\|$	120	12	8	6	4	6	5
χ_4	1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_5	4	-2	0	1	0	1	-1
χ_6	4	2	0	1	0	-1	-1
χ_7	6	0	-2	0	0	0	1

7. 假设 λ 是一个 $n \times n$ 阶矩阵 A 的一个特征值，其中 A 的所有元素都是整数. 那么 $\det(A - \lambda I_n) = 0$, 因此 λ 是多项式 $\det(xI_n - A)$ 的一个根, 多项式形为

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_r \in \mathbb{Z}).$$

反过来, 假设 λ 是多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ $(a_r \in \mathbb{Z})$ 的一个根. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

验证可得 $\det(xI_n - A) = p(x)$. 因为 $p(\lambda) = 0$, 所以 λ 是 A 的一个特征值. 因为 A 中的元素均为整数, 所以 λ 是代数整数.

第 23 章

1. 假设 $x \in G$ 且 x 为实数. 那么存在某个 $g \in G$, 有 $g^{-1}xg = x^{-1}$. 因此 $g^{-2}xg^2 = x$, 所以 $g^2 \in C_G(x)$. 令 m 为 g 的阶. 因为 $|G|$ 为奇数, 根据拉格朗日定理, 存在某个整数 n, 使得 $m = 2n + 1$. 那么 $g = g^{2(n+1)} \in C_G(x)$. 所以 $x^{-1} = g^{-1}xg = x$. 因为 $x^2 = 1$ 且 x 为奇阶, 所以 $x = 1$.

2. 采用定理 9.8 的记号. 由

$$\chi(g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r}) = \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_r^{i_r}$$

给定的 $G = C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}$ 的特征标 χ 为实数当且仅当对任意的 $1 \leqslant i \leqslant r$ 有 $\lambda_i = \pm 1$. n_i 次单位根 λ_i 为 -1 当且仅当 n_i 为偶数. 因此, 实不可约特征标的数量为 2^m, 其中 m 为 $n_1, \ldots, n_r$ 为偶数的个数. 然而 G 中满足 $g^2 = 1$ 的元素 g 仅能是元素 $g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r}$, 其中对每个 j, $i_j = 0$ 或者 n_j 为偶数且 $i_j = n_j/2$. 这样的元素个数也是 2^m.

3. D_{2n} 中满足 $g^2=1$ 的元素为

$$1, a^ib(0\leqslant i\leqslant n-1) \quad (\text{若 } n \text{ 为偶数 } a^{n/2} \text{ 也满足}).$$

若 n 为奇数这样的元素有 $n+1$ 个, 若 n 为偶数这样的元素有 $n+2$ 个. 这与所有不可约特征标的次数之和 $\sum\chi(1)$ 一致. 因为对任意的 χ 有 $\iota\chi\leqslant 1$, 根据 Frobenius-Schur 对合元计数原理我们知道对任意的 χ 有 $\iota\chi=1$.

4. 令 λ_1 和 λ_2 为 $g\rho$ 的特征值. 那么 $\chi_A(g)=\dfrac{1}{2}((\lambda_1+\lambda_2)^2-(\lambda_1^2+\lambda_2^2))=\lambda_1\lambda_2=\det(g\rho)$ (参见命题 19.14). 因为 $\chi(1)=2$ 有 $\chi_A(1)=1$. 根据 23.13 中 $\iota\chi$ 的定义, $\iota\chi=-1$ 当且仅当 $\chi_A=1_G$ 结果得证.

5. (a) 首先容易验证对任意的 $g\in G$, $\chi(g)$ 为实数, , 所以 $\iota\chi=\pm1$. 令 ρ 为根据 V 的基 v_1,v_2 得到的表示. 那么 $\det(a\rho)=1, \det(b\rho)=-\varepsilon^n$; 因此对任意的 $g\in G$ 有 $\det(g\rho)=1$ 当且仅当 $\varepsilon^n=-1$. 根据习题 4 即可得所需结果.

(b) 容易验证若 $g=a$ 或 b 且 $i,j\in\{1,2\}$ 那么

$$\beta(v_ig,v_j)=\beta(v_i,v_jg^{-1}).$$

比如, $\beta(v_1b,v_1)=\beta(v_2,v_1)=\varepsilon^n=\beta(v_1,\varepsilon^n v_2)=\beta(v_1,v_1b^{-1})$. 因此 β 为 G-不变的. β 的定义说明若 $\varepsilon^n=1$, β 是对称的, 若 $\varepsilon^n=-1$, β 是斜对称的. 根据定理 23.16 即可得.

(c) T_{4n} 中的元素为 a^i 和 $a^ib(0\leqslant i\leqslant 2n-1)$; a 为 $2n$ 阶, a^ib 为 4 阶. 因此 a^n 为唯一的 2 阶元.

(d) 参看习题 18.3 中 T_{4n} 的特征标 $\psi_j(1\leqslant j\leqslant n-1)$ 和 $\chi_j(1\leqslant j\leqslant 4)$. 显然 $\iota\chi_1=\iota\chi_3=1$, 且 $\iota\chi_2=\iota\chi_4=0$ 或 1, 分别对应 n 为奇数和偶数. 根据 (a)(或 (b)) 和习题 17.6 中 ψ_j 的构造, 根据 j 的奇偶可以分别得到 $\iota\psi_j=-1$ 或 1. 根据 n 的奇偶可以分别得到 $\sum\limits_{j=1}^{n-1}(\iota\psi_j)\psi_j(1)=0$ 或 -2. 因此 $\sum\limits_{\chi}(\iota\chi)\chi(1)=2$.

6. 令 V 为特征标为 χ 的一个 $\mathbb{C}G$-模. 因为 $\iota\chi=-1$, 存在一个 V 上的非零的 G-不斜对称双线性型 β. 因为 β 是 G-不变的, 子空间 $\{u\in V:\beta(u,v)=0 \text{ 对任意的} v\in V\}$ 是 V 的一个 $\mathbb{C}G$-子模; 因为 V 是不可约的, 所以

$$\{u\in V:\beta(u,v)=0 \text{ 对任意的} v\in V\}=\{0\}. \tag{*}$$

取 V 的基 $v_1,\ldots,v_n$, A 是 ij 位置上元素为 $\beta(v_i,v_j)$ 的 $n\times n$ 矩阵. 因为 β 为斜对称的, 有 $A^t=-A$. 所以 $\det(A^t)=(-1)^n\det A$, 所以 $\det A=(-1)^n\det A$. 根据 (*), A 是可逆的, 所以 $\det A\neq 0$. 所以 n 为偶数; 且 $n=\chi(1)$, 结果得证.

7. 取 V 的一组基为 $f_1,\ldots,f_n$, 并定义对称 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 为

$$a_{ij}=\beta_1(f_i,f_j), \quad b_{ij}=\beta(f_i,f_j).$$

利用 Gram-Schmidt 正交化, 可以构造 V 的一组基 $f_1',\ldots,f_n'$ 使得对任意的 i,j 有 $\beta_1(f_i',f_j')=\delta_{ij}$. 令 $P=(p_{ij})$ 为由

$$f_i'=\sum_j p_{ij}f_j$$

给定的 $n \times n$ 矩阵. 那么 $PAP^t = I_n$ 且 PBP^t 为对称阵. 根据对称阵的一个有名的性质, 存在一个正交阵 Q(即 $QQ^t = I$) 使得 $Q(PBP^t)Q^{-1}$ 为对角阵. 记 $Q = (q_{ij})$, 定义 V 的一组基 $e_1, \ldots, e_n$ 为

$$e_i = \sum_j q_{ij} f'_j.$$

那么

$$\beta_1(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad \text{因为} QPAP^tQ^t = I_n, \text{且}$$
$$\beta(e_i, e_j) = 0, \quad \text{若} i \neq j, \text{因为} QPBP^tQ^t \text{为对角阵}.$$

8. (a) 证明与 Schur 引理 9.1 的 (1) 部分类似.

(b) 令 $v_1, \ldots, v_n$ 为 $\mathbb{R}G$-模 V 的一组基, 考虑 $\mathbb{C}$ 上以 $v_1, \ldots, v_n$ 为基的向量空间 V'. 那么 V' 是一个 $\mathbb{C}G$-模, 假设为一个不可约的 $\mathbb{C}G$-模. 根据 Schur 引理, 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得对任意的 $v \in V'$ 有 $v\vartheta = \lambda v$. 但 $v_1\vartheta = \lambda v_1 \in V$, 所以 $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) 令 $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$, V 为由 $1 - a$ 和 $1 - a^2$ 张成的正则 $\mathbb{R}G$-模的 $\mathbb{R}G$-子模. 那么 V 是一个不可约的 $\mathbb{R}G$-模. 定义 $\vartheta : V \to V$ 为 $v\vartheta = av$ $(v \in V)$.

9. 因为 $Hxg = Hyg \Rightarrow Hx = Hy$, ρ_g 为置换, 因为 $(Hx)(\rho_{gh}) = Hxgh = (Hx)(\rho_g)(\rho_h)$, ρ 为一个同态. 有

$$g \in \mathrm{Ker}\rho \Leftrightarrow Hxg = Hx, \ \forall x \in G \Rightarrow$$
$$xgx^{-1} \in H, \ \forall x \in G \Leftrightarrow g \in \cap_{x \in G} x^{-1}Hx.$$

最后, ρ 为其核 $\cap_{x \in G} x^{-1}Hx$ 包含在 H 中的 $G \to \mathrm{Sym}(\Omega) \cong S_n$ 的同态.

10. 令 c_1, c_2 为 G 的特征标表中与共轭类 $\{1\}$ 和 t^G 对应的列. 对 c_2 这一列应用列正交关系有 $\sum \chi_i(t)^2 = |C_G(t)| = 2$(在所有不可约特征标 χ_i 上取和, 其中 $\chi_1 = 1_G$), 所以可以取 $\chi_1(t) = 1, \chi_2(t) = \pm 1$, 对 $i \geqslant 3$ 时 $\chi_i(t) = 0$. 根据 c_1, c_2 的正交关系有 $\chi_1(1) = \chi_2(1) = 1, \chi_2(t) = -1$. 此外, χ_1 和 χ_2 是仅有的线性特征标, 因为线性特征标在 t 上取值必为 ± 1. 因此根据定理 17.11, $|G : G'| = 2$. 最后, 若 G 为单群, 那么因为 $G' \lhd G$, 有 $G' = 1$, 也就是 G 为交换群. 因此 $G \cong C_2$.

第 25 章

1. 显然给定矩阵集合的大小为 $p(p-1)$. 记为 G. 验证封闭性, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y' + yx \\ 0 & xx' \end{pmatrix};$$

且矩阵乘法满足结合律, 单位元为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ 的逆元为 $\begin{pmatrix} 1 & -yx^{-1} \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$. 所以 G 为群.

2. 令 $\eta = e^{2\pi i/5}, \varepsilon = e^{2\pi i/11}$, 并记

$$\alpha = \varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^9, \quad \beta = \varepsilon^2 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{10}.$$

$F_{11,5}$ 的特征标表如下:

g_i	1	a	a^2	b	b^2	b^3	b^4
$\|C_G(g_i)\|$	55	11	11	5	5	5	5
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	η	η^2	η^3	η^4
χ_3	1	1	1	η^2	η^4	η	η^3
χ_4	1	1	1	η^3	η	η^4	η^2
χ_5	1	1	1	η^4	η^3	η^2	η
χ_6	5	α	β	0	0	0	0
χ_7	5	β	α	0	0	0	0

3. $\mathbb{Z}_p^*$ 为循环群, 所以根据习题 1.6(c), 存在一个整数 m 使得 $u^m \equiv v \bmod p$. 同时 m 与 q 互素, 因为 u 和 v 模 p 的阶均为 q. 因此 b^m 阶为 q. 且 $b^{-m}ab^m = a^{u^m} = a^v$. 令 $b' = b^m$. 那么

$$G_1 = \langle a, b' : a^p = b'^q = 1, b'^{-1}ab' = a^v \rangle.$$

因此 $G_1 \cong G_2$.

4. (a) 注意到 -1 为 $\mathbb{Z}_p^*$ 中唯一的 2 阶元. 因此

$$\begin{aligned} & u^m \equiv -1 \bmod p \text{ 对某个} m \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{Z}_p^* \text{中元素 } u \text{ 为偶阶元} \\ \Leftrightarrow \quad & q \text{ 为偶数} \\ \Leftrightarrow \quad & p \equiv 1 \bmod 4. \end{aligned}$$

(b) 根据命题 25.9, $a^G = \{a^{u^m} : m \in \mathbb{Z}\}$. 所以存在某个 m 有

$$a^{-1} \in a^G \Leftrightarrow u^m \equiv -1 \bmod p \Leftrightarrow p \equiv 1 \bmod 4.$$

(c) 对 G 的所有的 q 个线性特征标 χ_i 有 $\chi_i(a) = 1$. 因此

$$0 = \sum_{\chi \text{ 不可约}} \chi(1)\chi(a) = q + q\phi_1(a) + q\phi_2(a).$$

所以 $\phi_1(a) + \phi_2(a) = -1$. 同时有 $|C_G(a)| = p$, 所以

$$p = \sum_{\chi} \chi(a)\overline{\chi(a)} = q + \phi_1(a)\overline{\phi_1(a)} + \phi_2(a)\overline{\phi_2(a)}.$$

因此 $\phi_1(a)\overline{\phi_1(a)} + \phi_2(a)\overline{\phi_2(a)} = (p+1)/2$. 若 $p \equiv 1 \bmod 4$, 那么 a 与 a^{-1} 共轭, 且对任意的特征标 χ 有 $\chi(a)$ 为实数, 所以 $(\phi_1(a))^2 + (\phi_2(a))^2 = (p+1)/2$. 因此 $\phi_1(a)$ 和 $\phi_2(a)$ 为 $(-1 \pm \sqrt{p})/2$.

若 $p \equiv -1 \bmod 4$, 那么 a 与 a^{-1} 不共轭, 根据推论 15.6, $\phi_1(a)$ 和 $\phi_2(a)$ 均不是实数. 因此 $\phi_2(a) = \overline{\phi_1(a)}$. $2\phi_1(a)\overline{\phi_1(a)} = (p+1)/2$, 有 $\phi_1(a)$ 和 $\phi_2(a)$ 为 $(-1 \pm i\sqrt{p})/2$.

(d) 根据定理 25.10, $\phi_1(a) = \sum\limits_{m=1}^{(p-1)/2} \varepsilon^{u^m}$. 因为 $\mathbb{Z}_p^*$ 为 $p-1$ 阶循环群, u 为 $(p-1)/2$ 阶元, 所以 $\{u, u^2, \ldots, u^{(p-1)/2}\}$ 恰为模 p 的剩余类. 由 (c) 即可得.

5. 令 $H = \langle a, b\rangle$. 那么对任意的 $h \in H$, 共轭类 h^E 包含 h 与 h^{-1}. H 之外的元素作成 E 的一个共轭类. $E' = H$, 所以 E 恰有两个线性特征标, 设为 χ_1 和 χ_2. H 的典型非平凡线性特征标为

	1	a	a^2	b	b^2	ab	ab^2	a^2b	a^2b^2
χ	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2	ω	ω^2

其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$. 那么 $\chi \uparrow E$ 为下面的不可约特征标 χ_3. χ_4, χ_5 和 χ_6 可以类似的得到.

E 的特征标表如下:

g_i	1	a	b	ab	ab^2	c
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	18	9	9	9	9	2
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	-1
χ_3	2	2	-1	-1	-1	0
χ_4	2	-1	2	-1	-1	0
χ_5	2	-1	-1	2	-1	0
χ_6	2	-1	-1	-1	2	0

6. $Z(E) = \{1\}$, 对任意 $1 \leqslant i \leqslant 6$, 存在 $g_i \in E$ 使得 $g_i \neq 1$ 但 $\chi_i(g_i) = \chi_i(1)$(所以 $g_i \in \mathrm{Ker}\chi_i$).

7. (a) $F_{13,3}$(参见定理 25.10).

(b) $C_2 \times F_{13,3}$(参见定理 19.18).

(c) $D_6 \times F_{13,3}$(参见定理 19.18).

8. G 的共轭类为

$$\{1\}, \{a^3, a^6\}, \{a^r : 3 \nmid r\}, \{a^r b^2 : 3 \nmid r\}, \{a^r b^4 : 3 \nmid r\},$$
$$\{a^r b^2 : r = 0, 3, 6\}, \{a^r b^4 : r = 0, 3, 6\},$$
$$\{a^r b : 0 \leqslant r \leqslant 8\}, \{a^r b^3 : 0 \leqslant r \leqslant 8\}, \{a^r b^5 : 0 \leqslant r \leqslant 8\}.$$

令 $H_1 = \langle a\rangle$. 那么 $H_1 \lhd G$ 且 $G/H_1 \cong C_6$. 因此可以得到 6 个线性特征标, 下面已给出.

令 $H_2 = \langle a^3, b^2\rangle$. 那么 $H_2 \lhd G$ 且 $G/H_2 = \langle H_2a, H_2b\rangle \cong D_6$. 提升 D_6 的次数为 2 的不可约特征标可以得到 χ_7. 那么 $\chi_8 = \chi_7\chi_2$, $\chi_9 = \chi_7\chi_3$ 也是不可约的. 最后可以根据列正交关系得到不可约特征标 χ_{10}.

$G = \langle a, b : a^9 = b^6 = 1, b^{-1}ab = a^2\rangle$ 的特征标表如下:

g_i	1	a^3	a	ab^2	ab^4	b	b^2	b^3	b^4	b^5
$\|C_G(g_i)\|$	54	27	9	9	9	6	18	6	18	6
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω^2	ω	$-\omega$	ω^2	-1	ω	$-\omega^2$
χ_3	1	1	1	ω	ω^2	ω^2	ω	1	ω^2	ω
χ_4	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_5	1	1	1	ω^2	ω	ω	ω^2	1	ω	ω^2
χ_6	1	1	1	ω	ω^2	$-\omega^2$	ω	-1	ω^2	$-\omega$
χ_7	2	2	-1	-1	-1	0	2	0	2	0
χ_8	2	2	-1	$-\omega^2$	$-\omega$	0	$2\omega^2$	0	2ω	0
χ_9	2	2	-1	$-\omega$	$-\omega^2$	0	2ω	0	$2\omega^2$	0
χ_{10}	6	-3	0	0	0	0	0	0	0	0

其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$.

第 26 章

1. 令 χ 为 G 的一个不可约特征标. 那么存在 H 的某个不可约特征标 ψ 有 $\langle \chi\downarrow H, \psi\rangle_H \neq 0$. 根据 Frobenius 互反律有 $\langle \chi, \psi\uparrow G\rangle_G \neq 0$. 因为 H 为交换群, $\psi(1) = 1$. 根据推论 21.20, $(\psi\uparrow G)(1) = p$. 因此 $\chi(1) \leqslant p$, 且根据定理 22.11, $\chi(1) = 1$ 或 p. 假设 G 有 r 个线性特征标, s 个次数为 p 的不可约特征标. 那么

$$\text{根据定理 17.11, 存在某个 } m \text{ 有} r = p^m, \text{且}$$
$$\text{根据定理 11.12, } r + sp^2 = p^n.$$

因为 $s = p^{n-2} - p^{m-2}$ 且 s 为一个整数, 所以 m 至少为 2.

2. $\{1\}, \{z\}$ 和 $\{z^2\}$ 为 H 的共轭类. 对 H 中其他的任意元 h, 共轭类

$$h^H = \{h,\ hz, hz^2\}.$$

H(一个 27 阶非交换群) 的特征标表如下:

g_i	1	z	z^2	a	a^2	b	ab	a^2b	b^2	ab^2	a^2b^2
$\|C_G(g_i)\|$	27	27	27	9	9	9	9	9	9	9	9
χ_{00}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{01}	1	1	1	1	1	ω	ω	ω	ω^2	ω^2	ω^2
χ_{02}	1	1	1	1	1	ω^2	ω^2	ω^2	ω	ω	ω
χ_{10}	1	1	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2
χ_{11}	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2	1	ω^2	1	ω
χ_{12}	1	1	1	ω	ω^2	ω^2	1	ω	ω	ω^2	1
χ_{20}	1	1	1	ω^2	ω	1	ω^2	ω	1	ω^2	ω
χ_{21}	1	1	1	ω^2	ω	ω	1	ω^2	ω^2	ω	1
χ_{22}	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω	1	ω	1	ω^2
ϕ_1	3	3ω	$3\omega^2$	0	0	0	0	0	0	0	0
ϕ_2	3	$3\omega^2$	3ω	0	0	0	0	0	0	0	0

其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$.

3. G 有 11 个共轭类:$\{1\}, \{a^8\}, \{a^r, a^{-r}\}(1 \leqslant r \leqslant 7), \{a^r b : r\text{为偶数}\}$, $(D_{16} - G_1)$ $\{a^r b : r\text{为奇数}\}$. K 为定理 26.4 中的 $\{1, a^8\}$, 且 $G/K \cong D_{16}$. D_{16} 的特征标表在 26.8 和 18.3 中给出. 通过提升 D_{16} 的不可约特征标, 可以得到 G 的特征标 $\chi_1, \ldots, \chi_7$. 剩下的 4 个线性特征标 $\psi_j (j = 1, 3, 5, 7)$ 为由 $\langle a \rangle$ 的那些使得 $\chi(a^8) = -1$ 成立的线性特征标 χ 诱导到 G 得到的.

$G = \langle a, b : a^{16} = 1, b^2 = a^8, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ 的特征标表如下:

g_i	1	a^8	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	b	ab
$\|C_G(g_i)\|$	32	32	16	16	16	16	16	16	16	4	4
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
χ_5	2	2	0	-2	0	2	0	-2	0	0	0
χ_6	2	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	0
χ_7	2	2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	-2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	0
ψ_j $(j=1,3,5,7)$	2	-2	c_j	c_{2j}	c_{3j}	c_{4j}	c_{5j}	c_{6j}	c_{7j}	0	0

其中 $c_m = e^{2\pi i m/16} + e^{-2\pi i m/16} = 2\cos(m\pi/8)$.

4. (a) 可以验证 $AB = -BA, AC = -CA, AD = DA, BC = CB, BD = -DB, CD = -DC$. 因此 $Z \in G$, 且 $G/\langle Z \rangle$ 是交换的, 而 G 是非交换的. 所以 $G' = \langle Z \rangle$(参见命题 17.10).

(b) $A^2 = -B^2 = -C^2 = D^2 = I$. 因为 $G/\langle Z \rangle$ 是交换的, 对任意的 $g \in G$ 有 $g^2 \in \langle Z \rangle$. 因此 G 中每个元素均有形式 $A^i B^j C^k D^l Z^m$, $i, j, k, l, m \in \{0, 1\}$, 所以 $|G| \leqslant 32$; 因为对任意

的 $g \in G$, $g^4 = 1$, 所以 G 为一个 2-群.

(c) 通过计算可以说明每个与 A, B, C, D 可交换的矩阵均有形式 λI 形式, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$. 因此根据推论 9.3, 给定的表示是不可约的.

(d) 因为 G 有次数为 1 和 4 的不可约特征标, $|G| \geqslant 1^2 + 4^2 = 17$. 结合 (b), 说明 $|G| = 32$. 因为 $G' = \langle Z \rangle$, G 恰有 16 个次数为 1 的表示. 表示如下: 对每一个 (r, s, t, u),$r, s, t, u \in \{0, 1\}$, 有表示

$$A^i B^j C^k D^l Z^m \mapsto (-1)^{ir+js+kt+lu}.$$

加上次数为 4 的不可约表示就是 G 所有的不可约表示 (根据定理 11.12).

5. (a) 令 $\varepsilon = 2\pi i/8$. 有以下表示:

$$G_1 : a \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G_2 : a \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G_3 : a \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{3} \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G_4 : a \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{5} \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G_5 : a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, z \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

(b) 若 $j = 5, 6, 7$ 或 8, 那么 $Z(G_j) = \{1, a^2, z, a^2 z\} \cong C_2 \times C_2$. 因为 $Z(G_j)$ 不是循环群, 根据命题 9.16, G_j 没有忠实的不可约表示.

(c) 可以验证矩阵满足所要求的关系, 所以给定了一个表示. 容易看出矩阵生成一个元素个数大于 8 的群, 所以表示是忠实表示

(d) 下面给出忠实表示:

$$G_7 : a \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$G_8 : a \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. 下面的表记录了 $G_1, \ldots, G_9$ 中阶为 1,2,4 和 8 的元素个数.

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9
阶为1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
阶为2	9	1	5	3	3	7	11	3	5
阶为4	2	10	6	4	12	8	4	12	10
阶为8	4	4	4	8	0	0	0	0	0

所以 $G_1, \ldots, G_9$ 中除 G_5 和 G_8 外其他任意两个不同构. 但是 $G_5/G_5' \cong C_2 \times C_4$, 而 $G_8/G_8' \cong C_2 \times C_2 \times C_2$, 所以 $G_5 \ncong G_8$.

7. (a) 根据引理 26.1(1), 有 $\{1\} \neq Z(G) \neq G$. 根据引理 26.1(2), 有 $|G/Z(G)| \neq p$. 所以 $|Z(G)| = p$ 或 p^2. 假设 $|Z(G)| = p^2$. 若 $g \notin Z(G)$, 那么 $Z(G) \leqslant C_G(g) \neq G$, 且 $g \in C_G(g)$. 因此 $|C_G(g)| = p^3$ 且 $|g^G| = p$. 所以 G 有 $p^2 + (p^4 - p^2)/p$ 个共轭类.

(b) 假设 G 有 r 个次数为 1 的不可约特征标, s 个次数为 p 的不可约特征标. 因为 $\sum \chi(1)^2 = p^4$(定理 11.12), 不存在次数大于 p 的不可约特征标, 所以 $r + sp^2 = p^4$. 所以 $|G/G'| = r = p^2$ 或 p^3, 若 $r = p^2$ 那么 $r + s = 2p^2 - 1$. 因为 $r + s$ 等于 G 的共轭类的数量, 所以 (b) 成立.

(c) 根据引理 26.1(1), $G' \cap Z(G) \neq \{1\}$. 根据 (a) 和 (b), 若 $|Z(G)| = p^2$ 那么 $|G'| = p$; 若 $|G'| = p^2$ 那么 $|Z(G)| = p$. 因此 $|G' \cap Z(G)| = p$.

8. (a) 令 $Z = Z(G)$, 假设

$$G/Z = \langle aZ, bZ \rangle,$$

其中 $a^4 \in Z, a^2Z = b^2Z, b^{-1}abZ = a^{-1}Z$. 那么 $a^2 = b^2z$, 其中 $z \in Z$, 因此 $ba^2 = b^3z = b^2zb = a^2b$. 因为 a^2 与 a, b 和 Z 中的所有元素交换, 有 $a^2 \in Z$. 所以 $G/Z \ncong Q_8$.

(b) 若 G 为 16 阶非交换群, 那么根据习题 7, G' 或者 $G' \cap Z(G) = G'$, 对应 $G/(G' \cap Z(G))$ 是交换的, 或者 $G' \cap Z(G) = Z(G)$, 对应 $G/(G \cap Z(G)) \ncong Q_8$ (根据 (a)).

第 27 章

1. 假设

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z(SL(2, p)).$$

则

$$z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \Rightarrow c = 0,$$

$$z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z \Rightarrow c = -b, \quad a = d.$$

因此 $z = aI$; 并且由于 $z \in SL(2, p)$, 则有 $a^2 = 1$, 因此 $a = \pm 1$.

2. 通过验证可知

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

均为 $G=SL(2,3)$中的三阶元, 且它们之间互不共轭. 由于元素

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

在 $Z(G)$ 中, 且

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

的阶数为 4. 因此群 G 的共轭类代表元为

	g_1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	g_2 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	g_3 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	g_4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
g_i 的阶数	1	2	4	3
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	24	4	6
g_i 的阶数	3	6	6	
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	6	6	6	

下面将论述如何构造群 G 的特征标表.

首先我们注意到 $(\mathbb{Z}_3)^2$ 共有四个一维的子空间, 它们分别为由向量 $(0,1),(1,1),(2,1)$ 和$(1,0)$ 张成. 群 G 在这些子空间上的作用为置换作用, 因此得到一个群同态 $\phi: G \to S_4$. 通过验证可知 $\text{Ker}\phi = \{\pm I\}$. 因此 $G/\{\pm I\} \cong \text{Im}\phi$, 为 S_4 的一个阶数为 12 的子群; 因此 $G/\{\pm I\} \cong A_4$. 从而群 G 的特征标 $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4$ 均可通过 A_4 的不可约特征标在群 G 上的提升得到. χ_5,χ_6,χ_7 在 g_1,g_2,g_3 上的值可以通过列正交关系得到. 由于群 G 共有三个实的共轭类, 所以根据定理 23.1 可知在 χ_5,χ_6,χ_7 中必有一个为实特征标. 现在假设 χ_5 为实的, 则 $\chi_5(g_4)=\alpha$, 其中 α 为实数, 且根据推论 22.27 可知 $\alpha \neq 0$. 由于 $\chi_5\chi_2$ 与 $\chi_5\chi_3$ 均为群 G 的次数为 2 的不可约特征标, 且它们在 g_4 上的值分别是 $\alpha\omega$ 与 $\alpha\omega^2$, 因此它们必为 χ_6 与 χ_7(在某种顺序下), 现在假设 $\chi_5\chi_2=\chi_6$ 且 $\chi_5\chi_3=\chi_7$. 通过方程 $\sum\limits_j \chi_j(g_4)\overline{\chi_j(g_4)}=6$ 可得 $\alpha\overline{\alpha}=1$. 由于 α 为实数, 则 $\alpha=\pm 1$. 根据 $\chi_5(g_4)\equiv\chi_5(1) \bmod 3$ 可知 $\alpha=-1$. 当 $j=5,6,7$ 时, 根据习题 13.5 可知有 $\chi_j(g_7)=-\chi_j(g_4)$, 最后, 对于所有的 χ 有 $\chi(g_5)=\overline{\chi(g_4)}\chi(g_6)=\overline{\chi(g_7)}$. 下面是 $SL(2,3)$ 的特征标表 (其中 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$)

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
$\|C_G(g_i)\|$	24	24	4	6	6	6	6
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2	ω^2	ω
χ_3	1	1	1	ω^2	ω	ω	ω^2
χ_4	3	3	-1	0	0	0	0
χ_5	2	-2	0	-1	-1	1	1
χ_6	2	-2	0	$-\omega$	$-\omega^2$	ω^2	ω
χ_7	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω	ω^2

3. 运用命题 17.6.

4. (a) 对于求 T 的特征标表, 首先注意 T 与习题 17.2 与例子 21.25 中给出的 21 阶群是同构的, 并且在前面已经给出了该群的特征标表. 群 T 的共轭类代表元为 $h_1, \cdots, h_5$, 其中

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Z, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Z,$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z, \quad h_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z.$$

群 T 的两个线性特征标为 (其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$)

h_i	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
$\|C_T(h_i)\|$	21	3	3	7	7
1_T	1	1	1	1	1
λ	1	ω	ω^2	1	1

根据命题 21.23 可知 $1_T \uparrow G$ 与 $\lambda \uparrow G$ 的值为

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
$\|C_G(g_i)\|$	168	8	4	3	7	7
$1_T \uparrow G$	8	0	0	2	1	1
$\lambda \uparrow G$	8	0	0	-1	1	1

由于 $\langle 1_T \uparrow G, 1_T \uparrow G\rangle = 2, \langle 1_T \uparrow G, 1_G\rangle = 1$. 因此 $1_T \uparrow G = 1_G + \chi$, 其中 χ 为群 G 的一个不可约特征标. 另外, $\langle \lambda \uparrow G, \lambda \uparrow G\rangle = 1$, 所以 $\lambda \uparrow G$ 是不可约的, 记 $\phi = \lambda \uparrow G$.

(c) χ 与 χ_S 的值为 (参照命题 19.14):

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	168	8	4	3	7	7
χ	7	-1	-1	1	0	0
χ_S	28	4	0	1	0	0
ζ	12	4	0	0	-2	-2
ψ	6	2	0	0	-1	-1

通过验证可知 $\langle\chi_S,1_G\rangle=\langle\chi_S,\phi\rangle=\langle\chi_S,\chi\rangle=1$. 因此存在群 G 的一个特征标 ζ 使得

$$\chi_S=1_G+\phi+\chi+\zeta.$$

根据上表可知 $\langle\zeta,\zeta\rangle=4$, 因此要么存在群 G 的一个不可约特征标 ψ 使得 $\zeta=2\psi$, 要么 ζ 为四个互不相同的不可约特征标之和 (根据习题 14.7).

由于群 G 共有六个不可约特征标, $1_G,\phi,\chi$ 为其中的三个不可约特征标, 且它们均不是 ζ 的成分, 故 ζ 不可能是四个不可约特征标之和, 从而 $\zeta=2\psi$, 其中 ψ 为不可约特征标 (ψ 的值上表已给出).

(d) 特征标 $1_G,\phi,\chi$ 与 ψ 即为第 27 章末尾处给出的群 G 的特征标 $\chi_1,\chi_3,\chi_2,\chi_6$. 剩余的不可约特征标 χ_4,χ_5 可以通过列正交关系得到 (注意到 g_i 是实的 $\Leftrightarrow 1\leqslant i\leqslant 4$).

5. (a) 结合引理27.1的证明. 注意 $g_2\in Z(G)$, 且对于所有的 i, g_i,g_ig_2 具有相同的中心化子.

(b) 通过提升可以得到特征标 $\chi_1,\cdots,\chi_6$(结果如下表).

(c) 运用习题 13.5(对 $7\leqslant j\leqslant 11$, 都有 $\chi_j(-I)\neq\chi_j(I)$, 因为在 $7\leqslant j\leqslant 11$ 时, $-I$ 不在这些特征标的核中).

(d) 由于 $\sum_{j=1}^{11}\chi_j(g_3)\overline{\chi_j(g_3)}=8$, 从而可知当 $7\leqslant j\leqslant 11$ 时, $\chi_j(g_3)=0$(或者应用 (c) 部分). 并且根据推论 22.27 可知 $\chi_j(1)$ 为偶数.

(e) 由定理 22.16, 对于所有的特征标 χ 有 $\chi(g_6)\in\mathbb{Z}$. 因为 $\sum_{j=1}^{11}(\chi_j(g_6))^2=6$, 从而当 $7\leqslant j\leqslant 11$ 时,$\chi_j(g_6)$ 的值必为 $\pm1,\pm1,\pm1,0,0$(以某种顺序排列). 再根据推论 22.27 可知, 在 $\chi_7,\cdots,\chi_{11}$ 中必有两个特征标的次数可以被 6 整除, 将它们记为 χ_9,χ_{10}. 由于 $\sum_{j=1}^{11}(\chi_j(1))^2=168$, 并且 $12^2+6^2>168$, 故 $\chi_9(1)=\chi_{10}(1)=6$. 另外, 由于 $\chi_7(1)^2+\chi_8(1)^2+\chi_{11}(1)^2=96$, 从而 $\chi_7(1),\chi_8(1),\chi_{11}(1)$ 中必有两个值为 4 而另一个的值为 8, 记 $\chi_7(1)=\chi_8(1)=4,\chi_{11}(1)=8$. 现在根据 $\chi(1)\equiv\chi(g_6)\bmod 3$ 可以得到特征标表中剩余的不可约特征标在 g_6 上的值. 最后根据 (c) 可以得到 g_2,g_7 在特征标表中对应的值.

(f) 根据命题 19.14, ψ_A 在 g_1,g_2,g_3,g_6 上的值如下表:

	g_1	g_2	g_3	g_6
ψ_A	6	6	2	0

根据 ψ_A 在 g_1,g_2 上的值可知 ψ_A 是 $\chi_1,\chi_4,\chi_5,\chi_6$ 的线性组合, 根据 ψ_A 在 g_6 上的值可知 χ_1 不是 ψ_A 的成分, 最后, 由 ψ_A 在 g_3 上的值可知 $\psi_A=\chi_6$.

由于 g_4^2 与 g_3 共轭, 则 $(\psi(g_4)^2-\psi(g_3))/2=\psi_A(g_4)=\chi_6(g_4)=0$, 因此 $\psi(g_4)=0$. 同样地可证 $\psi(g_5)=0$.

令 $x=\psi(g_8)$. 由于 g_8^2 与 g_8 共轭, 从而 $(x^2-x)/2=\psi_A(g_8)=-1$, 故 $x=\dfrac{(1\pm i\sqrt{7})}{2}$. 假设 $\chi_7(g_8)=\dfrac{(1-i\sqrt{7})}{2}$, 则 $\chi_8=\overline{\chi}_7$. 由于对于所有的特征标 χ 有 $\overline{\chi(g_{10})}=\chi(g_8)$; 则根据 (c) 便可得到特征标表中 χ_7 与 χ_8 所对应的值.

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
g_i 的阶数	1	2	4	8	8	3	6	7	14	7	14
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	336	336	8	8	8	6	6	14	14	14	14
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	7	7	-1	-1	-1	1	1	0	0	0	0
χ_3	8	8	0	0	0	-1	-1	1	1	1	1
χ_4	3	3	-1	1	1	0	0	α	α	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$
χ_5	3	3	-1	1	1	0	0	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α	α
χ_6	6	6	2	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
χ_7	4	-4	0	0	0	1	-1	$-\alpha$	α	$-\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$
χ_8	4	-4	0	0	0	1	-1	$-\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$-\alpha$	α
χ_9	6	-6	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	-1	1	-1	1
χ_{10}	6	-6	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	-1	1	-1	1
χ_{11}	8	-8	0	0	0	-1	1	1	-1	1	-1

(g) 当 $i\neq 6$ 时, 有 $\sum\limits_{j=1}^{11}\chi_j(g_i)\overline{\chi_j(g_6)}=0$, 可以通过该公式得到特征标表中 χ_{11} 的值. 由于 g_4 与 g_4^{-1} 共轭, 因此对于所有的特征标 χ 有 $\chi(g_4)$ 均为实数. 从而通过公式 $\sum\limits_{j=1}^{11}\chi_j(g_1)\overline{\chi_j(g_4)}=0$ 与 $\sum\limits_{j=1}^{11}(\chi_j(g_4))^2=8$ 可知 $\chi_9(g_4)=-\chi_{10}(g_4)=\pm\sqrt{2}$, 现假设 $\chi_9(g_4)=\sqrt{2}$, 则根据列正交关系可以得到 χ_9 与 χ_{10} 乘法的值, 从而完成了特征标表的构造. 上面是 $SL(2,7)$的特征标表 $\left(\text{其中 } \alpha=\dfrac{(-1+i\sqrt{7})}{2}\right)$.

6. 假设 $Z=\{\pm I\}$, 且 T 为群 G 的 55 阶子群, 其中

$$T=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}Z : a\in\mathbb{Z}_{11}^*, b\in\mathbb{Z}_{11}\right\}.$$

则 T 的生成元为

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z \text{ 与 } y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} Z,$$

并且 T 共有五个线性特征标 ζ_j $(0 \leqslant j \leqslant 4)$, 其中

$$\zeta_j : x^u y^v \to e^{2\pi i j v/5}.$$

特征标 $\zeta_1 \uparrow G$ 与 $\zeta_2 \uparrow G$ 是不可约的, 它们分别是特征标表中的 χ_3 与 χ_4 (注意在计算 $\chi_3(g_5)$ 时运用 $e^{2\pi i/5}+e^{-2\pi i/5} = (-1+\sqrt{5})/2$). 令 $\chi_1 = 1_G$, 则 $\langle \zeta_0 \uparrow G, \chi_1 \rangle = 1, \langle \zeta_0 \uparrow G, \zeta_0 \uparrow G \rangle = 2$. 从而存在群 G 的一个不可约特征标 χ_2 使得 $\zeta_0 \uparrow G = \chi_1 + \chi_2$.

从而找到了群 G 的八个互不同构的不可约特征标中的四个, 记为 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$.

由于 $\sum\limits_{j=1}^{8} \chi_j(g_5)\overline{\chi_j(g_5)} = 5$, 从而可知不可约特征标 $\chi_5, \chi_6, \chi_7, \chi_8$ 在 g_5 上的值均为 0. 根据推论 22.27 可知当 $5 \leqslant j \leqslant 8$ 时, $\chi_j(1) \equiv 0 \bmod 5$. 然而由于 $\sum\limits_{j=5}^{8}(\chi_j(1))^2 = 250$, 故在不失一般性的情况下, 可以假设 $\chi_5(1), \chi_6(1), \chi_7(1), \chi_8(1)$ 的值分别为 $10, 10, 5, 5$.

根据定理 22.16 可知当 $1 \leqslant j \leqslant 4$ 时, 对于所有的特征标 χ 有 $\chi(g_j)$ 均为整数.

因为对于所有的特征标 χ 有 $\chi(1) \equiv \chi(g_3) \bmod 3$, 并且 $\sum\limits_{j=1}^{8}(\chi_j(g_3))^2 = 6$, 从而可得 $\chi_j(g_3)(5 \leqslant j \leqslant 8)$ 的所有值. 对于所有的特征标 χ 有 $\chi(g_4) \equiv \chi(g_3) \bmod 2$, 并且 $\sum\limits_{j=1}^{8}(\chi_j(g_4))^2 = 6$, 从而可知当 $5 \leqslant j \leqslant 8$ 时, $\chi_j(g_4) = \pm 1$.

另外, 对于所有的特征标 χ 有 $\chi(g_4) \equiv \chi(g_2) \bmod 3$, 并且 $\sum\limits_{j=1}^{8}(\chi_j(g_2))^2 = 12$, 从而可知对于所有的不可约特征标有 $|\chi(g_2)| < 3$. 从而根据 $\chi(g_2) \equiv \chi(g_1) \bmod 2$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{8}(\chi_j(g_2))^2 = 12$ 可知当 $j = 5, 6$ 时 $\chi_j(g_2) = \pm 2$, 当 $j = 7, 8$ 时 $\chi_j(g_2) = \pm 1$. 最后根据 $\sum\limits_{j=1}^{8} \chi_j(1)\chi_j(g_2) = 0$ 可知 $\chi_7(g_2) = \chi_8(g_2) = 1$, 并且在不失一般性的情况下可以得到 $\chi_5(g_2) = 2 = -\chi_6(g_2)$. 现在得到了特征标表的第 1, 2, 3, 5 列.

由于对于所有的特征标 χ 有 $\chi(g_4) \equiv \chi(g_2) \bmod 3$, 并且 $\sum\limits_{j=1}^{8}(\chi_j(g_4))^2 = 6$, 从而可以得到特征标表的第四列.

最后根据列正交关系可以完成对特征标表的构造. 下面是 $PSL(2, 11)$ 的特征标表(其中 $\alpha = (-1+\sqrt{5})/2, \beta = (-1-\sqrt{5})/2, \gamma = (-1+i\sqrt{11})/2$).

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
g_i 的阶数	1	2	3	6	5	5	11	11
$\|C_G(g_i)\|$	660	12	6	6	5	5	11	11
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	11	-1	-1	-1	1	1	0	0
χ_3	12	0	0	0	α	β	1	1
χ_4	12	0	0	0	β	α	1	1
χ_5	10	2	1	-1	0	0	-1	-1
χ_6	10	-2	1	1	0	0	-1	-1
χ_7	5	1	-1	1	0	0	γ	$\overline{\gamma}$
χ_8	5	1	-1	1	0	0	$\overline{\gamma}$	γ

第 28 章

1. 假设群 $GL(2,3)$ 的共轭类代表元为 $g_1, \cdots, g_8$, 其中

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ g_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ g_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ g_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ g_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

群 $GL(2,3)$ 的特征标表为

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
$\|C_G(g_i)\|$	48	48	6	6	4	8	8	8
λ_0	1	1	1	1	1	1	1	1
λ_1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1
ψ_0	3	3	0	0	1	-1	-1	-1
ψ_1	3	3	0	0	-1	-1	1	1
$\psi_{0,1}$	4	-4	1	-1	0	0	0	0
χ_1	2	-2	-1	1	0	0	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$
χ_2	2	2	-1	-1	0	2	0	0
χ_4	2	-2	-1	1	0	0	$-i\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$

2. 由于 $r = r^q$ 且 q 为偶数, 则 $\mathbb{F}_q$ 中的每一个元素 r 均可以表示为某个元素的平方. 假设

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,q).$$

则存在一个元素 $s \in \mathbb{F}_q^*$, 使得 $ad-bc=s^2$. 从而

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/s & b/s \\ c/s & d/s \end{pmatrix}.$$

上述等式右边的第一个矩阵为 sI, 第二个矩阵属于 $SL(2,q)$. 从而 $GL(2,q) \cong Z \times SL(2,q)$, 其中 $Z=\{sI : s \in \mathbb{F}_q^*\}$.

经分析可知 $SL(2,q)$具有如下的共轭类代表元.

(a) 单位元 I 的中心化子的阶数为 q^3-q.

(b) 矩阵 $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 中心化子的阶数为 q.

(c) 有 $(q-2)/2$ 个共轭类, 它们的代表元形式为 $d_{s,s^{-1}} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}$, 其中无序数组 $\{s,s^{-1}\}$ 中的元素均属于 $\mathbb{F}_q \setminus \mathbb{F}_2$. 这些共轭类代表元的中心化子的阶数为 $q-1$.

(d) 有 $q/2$ 个共轭类, 它们的代表元形式为 $v_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & r+r^{-1} \end{pmatrix}$, 其中无序数组 $\{r,r^{-1}\}$ 中的元素均属于 $\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_2$, 且满足 $r^{1+q}=1$. 这些共轭类代表元的中心化子的阶数为 $q+1$. 通过群 $GL(2,q)$ 的特征标在群 $SL(2,q)$ 上的限制, 可以得到 $SL(2,q)$ 的特征标表为

	I	u_1	$d_{s,s^{-1}}$	v_r
λ_0	1	1	1	1
ψ_0	q	0	1	-1
$\psi_{0,i}$	$q+1$	1	$\bar{s}^i + \bar{s}^{-i}$	0
χ_i	$q-1$	-1	0	$-(\bar{r}^i + \bar{r}^{-i})$

此处用到了在 28.3 中定义的函数 $r \to \bar{r}$. 特征标 $\psi_{0,i}$ 的下标 i 满足 $1 \leqslant i \leqslant (q-2)/2$; 特征标 χ_i 的下标满足 $1 \leqslant i \leqslant q/2$. 若 $q \neq 2$, 则 $SL(2,q)$ 的每一个非平凡特征标的核均为单位子群, 从而可知此时的 $SL(2,q)$ 为单群.

3. 首先有 $PSL(2,8) \cong SL(2,8)$.

由于多项式 x^3+x+1 在 $\mathbb{F}_2$ 中是不可约的, 因此可以将 $\mathbb{F}_8$ 写作

$$\mathbb{F}_8 = \{a+b\eta+\eta^2 : a,b,c \in \mathbb{F}_2 \text{ 并且} \eta^3 = 1+\eta\}.$$

数组 $\{s,s^{-1}\}$ 中的元素属于 $\mathbb{F}_8 \setminus \mathbb{F}_2$, 且它们分别为

$$\{\eta, 1+\eta^2\}, \{\eta^2, 1+\eta+\eta^2\}, \{1+\eta, \eta+\eta^2\}.$$

从而得到了下面的共轭类代表元 g_3, g_4, g_5.

$\mathbb{F}_8$ 上首项系数为 1 常数项也为 1 的不可约二次多项式为

$$x^2+x+1, x^2+\eta x+1, x^2+\eta^2 x+1, x^2+(\eta+\eta^2)x+1.$$

这些二次多项式所对应的伴随矩阵为如下的共轭类代表元 g_6,g_7,g_8,g_9.

现在给出 $SL(2,8)$ 的所有共轭类代表元:

$$g_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},g_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$g_3=\begin{pmatrix}\eta&0\\0&1+\eta^2\end{pmatrix},g_4=\begin{pmatrix}\eta^2&0\\0&1+\eta+\eta^2\end{pmatrix},g_5=\begin{pmatrix}1+\eta&0\\0&\eta+\eta^2\end{pmatrix},$$

$$g_6=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},g_7=\begin{pmatrix}0&1\\1&\eta\end{pmatrix},g_8=\begin{pmatrix}0&1\\1&\eta^2\end{pmatrix},g_9=\begin{pmatrix}0&1\\1&\eta+\eta^2\end{pmatrix}.$$

选取 $\mathbb{F}_{64}^*$ 的一个生成元 ε 使得 $\varepsilon^7+\varepsilon^{-7}=\eta$. 则 $\varepsilon^{14}+\varepsilon^{-14}=\eta^2,\varepsilon^{21}+\varepsilon^{-21}=1,\varepsilon^{28}+\varepsilon^{-28}=\eta^4=\eta+\eta^2$. 则 $SL(2,8)$ 的特征标表为

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	504	8	7	7	7	9	9	9	9
λ_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ψ_0	8	0	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$\psi_{0,1}$	9	1	$2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$	$2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$	$2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$	0	0	0	0
$\psi_{0,2}$	9	1	$2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$	$2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$	$2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$	0	0	0	0
$\psi_{0,3}$	9	1	$2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$	$2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$	$2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$	0	0	0	0
χ_3	7	-1	0	0	0	-2	1	1	1
χ_1	7	-1	0	0	0	1	$-2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$	$-2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$	$-2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$
χ_2	7	-1	0	0	0	1	$-2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$	$-2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$	$-2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$
χ_4	7	-1	0	0	0	1	$-2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$	$-2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$	$-2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

第 29 章

1. (a) 首先容易验证 ϕ 为一个群同态, 且对于任意的 $x,y\in G$, 元素 $(x,y)\in G\times G$ 在 ϕ 的作用下将 x 变为 y, 从而知该作用是传递的.

(b) $(G\times G)_1=\{(g,g):g\in G\}$, 且 $\mathrm{Ker}\phi=\{(z,z):z\in Z(G)\}$.

(c) $G\times G$ 在 $G\times G$ 上的每一个轨道均包含一个形式为 $(1,x)$ 的有序数组, 若 (g,h) 将 $(1,x)$ 变为 $(1,y)$, 则 $g=h$ 且 $y=g^{-1}xg$. 因此若 $C_1,\cdots,C_k$ 为群 G 的共轭类, 且 $x_i\in C_i$, 则 $(1,x_i)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 为 $G\times G$ 在 $G\times G$ 上作用的轨道代表元, 从而可知它的秩为 k.

由于 $x((g,h)\phi) = x$ 当且仅当 $xhx^{-1} = g$. 从而可知当 g 与 h 不共轭时, $\pi(g,h) = |\text{fix}_G(g,h)| = 0$; 当 g 与 h 共轭时, $\pi(g,h) = |C_G(x)|$. (因为在后一种情况下, 若 $xhx^{-1} = g$, 则每一个满足 $yhy^{-1} = g$ 的 y, 都具有形式 $y = x$(其中有 $c \in C_G(x)$) 因此根据列正交关系可知 $\pi = \sum \chi \times \overline{\chi}$.

2. 在空间 V 中共有 $q^2 - 1$ 个非零向量, 且它的每一个一维子空间均包含 $q-1$ 个向量, 并且任意两个互不相同的一维子空间没有非零的公共向量. 因此,$|\Omega| = (q^2-1)/(q-1) = q+1$.

3. 沿用命题 28.4 及定理 28.5 中给出的群 $GL(2,q)$ 的共轭类与不可约特征标的记号. 首先容易证明 π 在共轭类代表元 $I, u_1, d_{1,t}$ 上的取值分别为 $q^2-1, q-1, q-1$ 而在其他的共轭类上取值为 0. 通过求内积得到

$$\langle \pi, 1_G \rangle = \langle \pi, \psi_0 \rangle = \langle \pi, \psi_{0,j} \rangle = 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant q-2).$$

又因为特征标 $1_G + \psi_0 + \sum_1^{q-2} \psi_{0,j}$ 的次数为 $\pi(1) = q^2 - 1$, 从而可知 $\pi = 1_G + \psi_0 + \sum_1^{q-2} \psi_{0,j}$.

4. 首先注意到元素 g 固定陪集 $H_1 x$ 当且仅当 $xgx^{-1} \in H_1$. 若群 G 为交换群, 则由此可以得到 $g \in H_1$. 若 $g \notin H_1$, 则 $\pi_1(g) = 0$, 若 $g \in H_1$, 则 $\pi_1(g) = |G:H_1|$ 因此 $H_1 = \{g \in G : \pi_1(g) \neq 0\}$. 对于群 H_2, 可以得到相同的结论, 因此若 $\pi_1 = \pi_2$ 则 $H_1 = H_2$.

当群 G 不是交换群时, 有如下反例: 令 $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle, H_1 = \langle b \rangle, H_2 = \langle a^2 b \rangle$. 则 $\pi_1 = \pi_2$ 但是 $H_1 \neq H_2$.

5. 由命题 29.4 可知 $1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}_\Omega(g)|$, 因此 $\sum |\text{fix}_\Omega(g)| = |G|$. 由于对任意的 g, $|\text{fix}_\Omega(g)|$ 均为非负整数, 且 $|\text{fix}_\Omega(1)| = |\Omega| > 1$, 因此必存在 $g \in G$ 满足 $|\text{fix}_\Omega(g)| = 0$.

6. 记 $\pi = \pi^{(n-2,1,1)}$. 运用命题 29.6 计算内积可得

$$\langle \pi, \pi \rangle = 7, \langle \pi, 1 \rangle = 1, \langle \pi, \pi^{(n-1,1)} \rangle = 3, \langle \pi, \pi^{(n-2,2)} \rangle = 4.$$

运用命题 29.13 可知 $\pi^{(n-2,1,1)} = 1 + 2\chi^{(n-1,1)} + \chi^{(n-2,2)} + \chi$, 其中 χ 为不可约特征标. 因此, $\chi = 1 + \pi - \pi^{(n-1,1)} - \pi^{(n-2,2)}$, 由此可知 $\chi(1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, $\chi(12) = \frac{1}{2}(n-2)(n-5)$, $\chi(123) = \frac{1}{2}(n-4)(n-5)$. 当 $n=6$ 时, $\chi^{(4,1,1)}$ 即为例 19.17 中的 χ_5.

第 30 章

1. 根据定理 30.4 可知, $a_{245} = 168/(8 \cdot 3) = 7$. 因此根据 (30.3), $PSL(2,7)$ 中包含元素 a, b 使得 a 的阶数为 2,b 的阶数为 3,ab 的阶数为 7.

2. 错误. $a_{225} = (1 + (-1 + i\sqrt{7})/6 + (-1 - i\sqrt{7})/6 - 4/6)168/(8 \cdot 8) = 0$, 同样地可知 $a_{226} = 0$. 从而可知在 $PSL(2,7)$ 中不存在两个正合元使得它们的乘积阶数为 7.

3. 正确. 根据习题 27.6 的答案对PSL (2.11)的共轭类的标号可知$a_{235} = \frac{660}{12 \cdot 6}\left(1 + \frac{1}{11}\right) = 10$. 因此 $PSL(2,11)$ 包含元素 x, y 使得 x 的阶数为 2,y 的阶数为 3,xy 的阶数为 5. 假设 H

为 $PSL(2,11)$ 中的子群 $\langle x,y\rangle$, 则存在从 A_5 到 H 的满同态 ϑ(其中 ϑ 将 a 变为 x, 将 b 变为 y). 由于 $\operatorname{Ker}\vartheta \times A_5$ 和 A_5 为一个单群从而可知 $H\cong A_5$.

4. 假设 G 为一个群且它的特征标表如下 (其中 $\alpha=(1+\sqrt{5})/2,\beta=(1-\sqrt{5})/2$).

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	1	0	-1	-1
χ_3	5	-1	1	0	0
χ_4	3	0	-1	α	β
χ_5	3	0	-1	β	α

当 $1\leqslant i\leqslant 5$ 时, 有 $|C_G(g_i)|=\sum_{j=1}^{5}\chi_j(g_i)\overline{\chi_j(g_i)}$. 从而 g_1,g_2,g_3,g_4,g_5, 的中心化子的阶数分别为 $60,3,4,5,5$. 因此 g_2,g_4,g_5 的阶数为 $3,5,5$; 又因为没有其他元素的中心化子的阶数为偶数 (除了 $i=1$), 从而可知 g_3 的阶数为 2.

由于 $a_{324}=60/(4\cdot 3)$. 从而群 G 中包含元素 x,y 使得 x 的阶数为 2,y 的阶数为 3,xy 的阶数为 5. 类似于习题 3, 群 G 包含一个子群 H 使得 $H\cong A_5$. 由于 $|G|=60$, 从而 $G\cong A_5$.

5. (a) 根据公式 $|C_G(g_i)|=\sum_{j=1}^{7}\chi_j(g_i)\overline{\chi_j(g_i)}$, 可知共轭类代表元的中心化子的阶数以及共轭类大小为

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	360	8	4	9	9	5	5
$\lvert g_i^G\rvert$	1	45	90	40	40	72	72

因此 $|G|=360$. 且根据命题 17.6 可知它是一个单群.

(b) 根据 Frobenius-Schur 对合元计数原理 (推论 23.17) 可知, 群 G 的对合元个数 t 的上界为

$$1+t\leqslant\sum_{j=1}^{7}\chi_j(1)=46.$$

通过考虑 $|C_G(g_i)|$, 可以知道, 只有 g_2 和 g_3 有可能是偶数阶. 因为 $t\leqslant 45$, 所以只有 g_2 可能是对合元, 因此 g_3 的阶数为 4(g_2 和 g_3 的阶数的结论也可以通过 Sylow 定理得到).

(c) 显然 g_6,g_7 的阶数为 5, 且在 g_4,g_5 中至少有一个的阶数为 3. 若 $j=4$ 或 5 且 $k=6$ 或者 7, 则

$$a_{2jk}=\frac{|G|}{|C_G(g_2)||C_G(g_j)|}\sum_{\chi}\frac{\chi(g_2)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}=\frac{360}{8\cdot 9}=5.$$

因此群 G 包含元素 x,y 使得 x 的阶数为 2,y 的阶数为 3,xy 的阶数为 5. 与习题 3 的解答一样, 群 G 的子群 $H=\langle x,y\rangle$ 与 A_5 同构.

(d) 若 $g, h \in G$, 则

$$(gh)\rho : Hx \mapsto Hxgh,$$
$$(g\rho)(h\rho) : Hx \mapsto Hxg \mapsto Hxgh.$$

从而 ρ 是一个同态.

(e) 由于群 G 为一个单群, 则 $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$. 因此 G 同构于 S_6 的一个子群 K. 由于 $|S_6 : K| = 6!/360 = 2$, 故 K 必为 A_6.

6. 考虑例 30.6(3) 中的图形, 我们将解释如何将 G 中元素标注在图形顶点上.

选择一个顶点将它标为 1. 根据下面的归纳规则标注图形的顶点. 假设 v 是一个顶点且它相邻的一个顶点 u 被标为 g. 则 v 被标记为

$$\begin{aligned}&ga, \text{ 若边}uv\text{上没有箭头},\\&gb, \text{ 若边}uv\text{上存在从}u\text{到}v\text{上的箭头},\\&gb^{-1}, \text{ 若边}uv\text{上存在从}v\text{到}u\text{上的箭头}.\end{aligned}$$

例如, 若将图形底部的左边顶点标为 1, 则被标记图形的部分结构为



关系 $a^2 = 1$ 保证了标记是沿着未被标记的边标注的; 因为 $b^3 = 1$, 标记是沿着三角形的; 而关系 $abababab = 1$ 则处理的是八角形.
由于群 G 的每一个元素均出现在图形的 24 个顶点上, 从而可知 $|G| \leqslant 24$.

7. 群 $PSL(2,7)$ 的共轭类在引理 27.1 中已经给出. 在该引理中给出了元素 g_2 为正合元, 且它的中心化子的阶数为 8 的证明. 令

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

从而可知该中心化子由 a, b 生成, 且 $a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$, 则该中心化子与 D_8 同构.

根据习题 12.3 与 12.4, $C_{A_6}((12)(34))$ 的阶数为 8, 且由 $(1324), (13)(24)$ 生成, 因此根据上面的结果可知它与 D_8 同构.

8. 假设 G 为单群 $PSL(2,17)$. 在数域 $\mathbb{Z}_{17}$ 中, 元素 4 是一个四次单位根, 则 $t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} Z$ 是一个正合元. 经过计算可知 $C_G(t)$ 是由对角矩阵与矩阵 $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z$ 生成的群, 因此是由 b 与 $a = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} Z$ 生成的群. 由于 $a^8 = b^2 = 1$, 且 $b^{-1}ab = a^{-1}$, 从而可知 $C_G(t) \cong D_{16}$.

第 31 章

1. 假设群 G 有一个指数为 p^r(p 为素数) 的交换子群 H, 且 $|G|>p$. 若 $H=\{1\}$, 则

$$|G|=p^r,$$

根据引理 26.1(1) 知 G 不是单群. 因此, 假设 $H\neq\{1\}$; 选择 $1\neq h\in H$. 则由于 H 为交换群, 则 $H\leqslant C_G(h)$, 因此 $|G:C_G(h)|$ 为 p 的幂次. 若 $|G:C_G(h)|=1$, 则 $\langle h\rangle\lhd G$, 从而 G 不是单群, 若 $|G:C_G(h)|>1$, 则根据定理 31.3 知 G 不是单群.

2. 根据 Burnside 定理,$|G|$ 可以被至少三个不同的素数整除. 因为 $3\cdot5\cdot7>80$ 所以 $|G|$ 是偶数从而根据习题 13.8, $|G|$ 可以被 4 整除. 由于 $4\cdot3\cdot7>80$, 从而群的阶数只可能为 $|G|=4\cdot3\cdot5=60$.

第 32 章

1. (a) 由于对于任意的 i,j, 都有

$$d(e_ib,e_jb)=d(e_i,e_j)=\delta_{ij},$$

从而有 $BB^t=I$. 因为 $1=\det I=(\det B)(\det B^t)=(\det B)^2$, 从而 $\det B=\pm1$.

(b) (i) 矩阵 C 的特征值为数域 $\mathbb{R}$ 上的三次特征多项式 $\det(C-xI)$ 的根. 因此, C 具有一个或者三个实特征值.

(ii) C 的特征值的乘积为 1. 若 C 具有三个实特征值, 则它们不可能全部为负数; 若 C 具有一个实特征值 λ 与一对相互共轭的非实特征值 $\mu,\overline{\mu}$, 则 $\lambda\mu\overline{\mu}=1$, 因此 $\lambda>0$. 从而可知 C 具有一个正的特征值, 记为 λ.

(iii) 假设 v 为 λ 的一个特征向量. 则

$$d(v,v)=d(vC,vC)=d(\lambda v,\lambda v)=\lambda^2d(v,v),$$

且 $\lambda=1$.

(c) 假设 c 为等距同构 $v\mapsto vC$. 由 (b) 可知,c 固定向量 v; 从而可以知道 c 必定为绕着通过向量 v 的坐标轴的一个旋转. 根据 c 的定义可以得到关于 b 的结果.

(d) 取三个正交向量组成坐标系, 其中一个为旋转 b 所绕的轴. 则在这个坐标系下 b 所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\phi&\sin\phi\\0&-\sin\phi&\cos\phi\end{pmatrix}.$$

从而可知 $\mathrm{tr}B=1+2\cos\phi$.

2. 假设 G 为 $O(\mathbb{R}^3)$ 的一个子群. 则易知平移子模 T(即包含所有平移模式子模) 与群 G 在 $\mathbb{R}^3$ 上的自然作用形成的 $\mathbb{R}G$-模同构. 从而根据习题 1 的 (d) 可知

$$\chi_T(g)=\begin{cases}1+2\cos\phi, & \text{若 } g \text{ 为角度为 } \phi \text{ 的旋转},\\ -(1+2\cos\phi), & \text{若 } -g \text{ 为角度为 } \phi \text{ 的旋转}.\end{cases}$$

现在考虑旋转子模 R, 即包含了所有旋转模式. 则通过分析可知

$$\chi_R(g)=\begin{cases}\chi_T(g), & \text{若 } g \text{ 为旋转},\\ -\chi_T(g), & \text{若 } g \text{ 不是旋转}.\end{cases}$$

从而可知 $\chi_T+\chi_R$ 具有所需要的形式.

3. 矩阵 A 为

$$\frac{k}{m}\begin{pmatrix}-3/2 & 0 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4\\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/4\\ 3/4 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0\\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4 & -5/4 & 0 & 1\\ 3/4 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 & -3/4 & -\sqrt{3}/4\\ \sqrt{3}/4 & 1/4 & 0 & 1 & -\sqrt{3}/4 & -5/4\end{pmatrix}.$$

4. 比较简单的一组基为

$$\frac{1}{2}(r_1+r_2)=(v_{12}+v_{21})-(v_{34}+v_{43}),$$

$$\frac{1}{2}(r_1+r_3)=(v_{13}+v_{31})-(v_{24}+v_{42}),$$

$$\frac{1}{2}(r_1+r_4)=(v_{14}+v_{41})-(v_{23}+v_{32}).$$

其中 r_1,r_2,r_3,r_4 为 w_1,w_2,w_3,w_4 在一个 $\mathbb{R}G$-模同构下的像 (与例 32.20 结尾处矩阵 B 的构造进行比较).

5. (a) 该结果为几何方面的平凡结果.

(b) 将原子每个顶点位置分别记为 $0',1',2',3',4'$. $1'$ 到经过 1 且与 12 垂直的平面的距离为 $x_{12}+\frac{1}{2}(x_{13}+x_{14})$. 同样的 $2'$ 到经过 2 且与 12 垂直的平面的距离为 $x_{21}+\frac{1}{2}(x_{23}+x_{24})$. 从而 12 减少的量为 $x_{12}+x_{21}+\frac{1}{2}(x_{13}+x_{14}+x_{23}+x_{24})$. 对于其他的情况可以用该方法同样的计算.

(c) 我们将每个原子受到的力理解为向量, 然后将该向量在选定的三个相交于原点单位向量上作分解. 假设 d_{ij} 为边 ij 上减少的量, 计算同部分 (b) 则在顶点 1 处, 作用力所代表的向

量对于分解系数在方向 12 上的贡献为 $-k_1d_{12}$, 在方向 13 与 14 上的贡献为 0. 在 10 上的贡献为 $k_2d_{10}sec(<012)$ 因此

$$m_1\ddot{x}_{12} = -k_1d_{12} - \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)k_2d_{10}}.$$

运用 (b) 中结果替代 d_{12} 与 d_{10} 可以得到 $\ddot{x}_{12}$ 的表达式. 对于其他的情况可以用该方法同样地计算.

(d) 这个 15×15 的矩阵 A 的系数均出现在方程 $\ddot{x}_{12}=xA$ 中. 如果写出该矩阵, 则可知给定的向量是 A 的特征向量它所对应的特征值分别为 $-(4k_1+k_2)/m_1, 0, 0, 0, -k_1/m_1, -k_1/m_1$.

(e) 矩阵 B 为

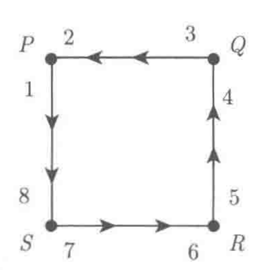
$$\begin{pmatrix} -(6k_1+k_2)/3m_1 & -2k_2/3m_1 & -4k_2\sqrt{2}/(m_2\sqrt{3}) \\ -(3k_1+k_2)/3m_1 & -2k_2/3m_1 & -4k_2\sqrt{2}/(m_2\sqrt{3}) \\ -k_2\sqrt{3}/(9m_1\sqrt{2}) & -2k_2\sqrt{3}/(9m_1\sqrt{2}) & -4k_2/3m_2 \end{pmatrix}.$$

(f) 通过计算可知矩阵 B 存在一个特征值为 0, 且它所对应的特征向量为 $(1,-2,\sqrt{6})$. 这与例 32.20 中声明的 A 的平移向量

$$r_1 - 2s_1 + 3\cos\vartheta w_1$$

为它的一个特征向量的结论是吻合的.

6. (a) 假设所对应的坐标系如下图



则所对应的对称群为 $G=D_8$. 假设 a 所对应的旋转作用情况为 $P\to Q\to R\to S\to P$, 且 b 为 PR 轴的反射. $\mathbb{R}G$-模 $\mathbb{R}^8$ 的特征标 χ 为

	1	a^2	a	b	ab
χ	8	0	0	0	0

根据例 16.3(3) 中 D_8 的特征标表可知

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + 2\chi_5.$$

则旋转模式为 $(t+\beta)v$, 其中

$$v = (1,-1,1,-1,1,-1,1,-1) \in V_{\chi_2}.$$

则平移模式为 $(t+\beta)v$, 其中 v 由 v_1, v_2 张成且

$$v_1=(1,0,0,1,-1,0,0,-1),\quad v_2=(0,1,-1,0,0,-1,1,0).$$

齐次部分 $V_{\chi_1}, V_{\chi_3}, V_{\chi_4}$ 分别由向量 $(1,1,1,1,1,1,1,1)$, $(1,1,-1,-1,1,1,-1,-1)$, 和 $(1,-1,-1,1,1,-1,-1,1)$ 张成. 八个特征向量中的最后一个集合由 V_{χ_5} 与 $\mathbb{R}^8_{vib}$ 相交得到, 且这个空间由向量 $(1,0,0,-1,-1,0,0,1)$ 与 $(0,1,1,0,0,-1,-1,0)$ 张成.

(b) 矩阵 A 为

$$-\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. (a, b) 假设 $\varepsilon_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 为如下投射

$$\varepsilon_i: u_1+\cdots+u_m \mapsto u_i$$

(其中对于所有的 k 有 $u_k\in U_k$). 则

$$w\mapsto wA\varepsilon_j\vartheta_j^{-1}\vartheta_i \quad (w\in U_i)$$

给出了一个从 U_i 到 U_i 的 $\mathbb{R}G$-模同态. 根据习题 23.8 知, 存在一个 $\lambda_{ij}\in\mathbb{R}$ 使得对于所有的 $w\in U_i$, 有

$$wA\varepsilon_j=\lambda_{ij}w\vartheta_i^{-1}\vartheta_j.$$

由于 $\sum\limits_{j=1}^{m}\varepsilon_j$ 为 $U_1\oplus\cdots\oplus U_m$ 到自身的一个单位自同态, 从而对于所有的 $w\in U_i$ 有

$$wA=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}w\vartheta_i^{-1}\vartheta_j.$$

现在分别取 $w=u\vartheta_i$, $w=v\vartheta_i$, 则可得 (a), (b) 中的结论.

(c) 选取 U_1 的一组基 $u_1,\cdots,u_n$. 假设 A_u 的特征向量已知. 对于所有的 $1\leqslant k\leqslant n$ 有 A 在 $sp(u_k\vartheta_1,\cdots,u_k\vartheta_m)$ 中的特征向量均由 A_u 的特征向量给出 (见 (b)). 因此可知 A 的所有特征向量均在 $U_1\oplus\cdots\oplus U_m$ 中.

参 考 文 献

文中提到的书目

[1] H. S. M. Coxeter and W.J.O. Moser. Generators and Relations for Discrete Groups. Fourth Edition. Springer-Verlag, 1980.

[2] J. B. Fraleigh. A First Course in Abstract Algebra. Third Edition. AddisonWesley, 1982.

[3] D. Gorenstein. Finite Simple Groups: An Introduction to their Classification. New York: Plenum Press, 1982.

[4] G. D. James. The Representation Theory of the Symmetric Groups. Lecture Notes in Mathematics No.682. Spring-Verlag, 1978.

[5] D. S. Passman. Permutation Groups. Benjamin, 1968.

[6] H. Pollard and H. G. Diamond. The Theory of Algebraic Numbers. Second Edition. Carus Mathematical Monographs No.9,Mathematical Association of America, 1975.

[7] J. J. Rotman. An Introduction to the Theory of Groups. Third Edition. Allyn and Bacon, 1984.

[8] D. S. Schonland. Molecular Symmetry-an Introduction to Group Theory and its uses in Chemistry. Van Nostrand, 1965.

建议进一步阅读的书目

[1] M. J. Collins. Representations and Characters of Finite Groups. Cambridge University Press, 1990.

[2] C. W. Curtis and I. Reiner. Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders. Volume I, Wiley-Interscience, 1981.

[3] W. Feit. Characters of Finite Groups. Benjamin, 1967.

[4] I. M. Isaacs. Character Theory of Finite Groups. Academic Press, 1976.

[5] W. Ledermann. Introduction to Group Characters. Second Edition. Cambridge University Press,1987.

[6] J. P. Serre. Linear Representations of Finite Groups. Springer-Verlag, 1977.

索　引

K

L

M

N

O

P

Q

S

T

W

X

Y

Z

其他

《现代数学译丛》已出版书目

(按出版时间排序)

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007.12 〔德〕Andreas Enge 著 吴 铤 董军武 王明强 译
2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008.1 〔美〕Steven Roman 著 邓欣雨 译
3 现代非参数统计 2008.5 〔美〕Larry Wasserman 著 吴喜之 译
4 最优化问题的扰动分析 2008.6 〔法〕J. Frédéric Bonnans 〔美〕Alexander Shapiro 著 张立卫 译
5 统计学完全教程 2008.6 〔美〕Larry Wasserman 著 张 波 等译
6 应用偏微分方程 2008.7 〔英〕John Ockendon, Sam Howison, Andrew Lacey & Alexander Movchan 著 谭永基 程 晋 蔡志杰 译
7 有向图的理论、算法及其应用 2009.1 〔丹〕J. 邦詹森 〔英〕G. 古廷 著 姚兵 张忠辅 译
8 微分方程的对称与积分方法 2009.1〔加〕乔治 W. 布卢曼 斯蒂芬 C. 安科 著 闫振亚 译
9 动力系统入门教程及最新发展概述 2009.8 〔美〕Boris Hasselblatt & Anatole Katok 著 朱玉峻 郑宏文 张金莲 阎欣华 译 胡虎翼 校
10 调和分析基础教程 2009.10 〔德〕Anton Deitmar 著 丁勇 译
11 应用分支理论基础 2009.12 〔俄〕尤里·阿·库兹涅佐夫 著 金成桴 译
12 多尺度计算方法——均匀化及平均化 2010.6 Grigorios A. Pavliotis, Andrew M. Stuart 著 郑健龙 李友云 钱国平 译
13 最优可靠性设计：基础与应用 2011.3 〔美〕Way Kuo, V. Rajendra Prasad, Frank A.Tillman, Ching-Lai Hwang 著 郭进利 闫春宁 译 史定华 校
14 非线性最优化基础 2011.4 〔日〕Masao Fukushima 著 林贵华 译
15 图像处理与分析：变分，PDE，小波及随机方法 2011.6 Tony F. Chan, Jianhong (Jackie) Shen 著 陈文斌，程晋 译
16 马氏过程 2011.6 〔日〕福岛正俊 竹田雅好 著 何萍 译 应坚刚 校

17 合作博弈理论模型 2011.7 〔罗〕Rodica Branzei 〔德〕Dinko Dimitrov 〔荷〕Stef Tijs 著 刘小冬 刘九强 译

18 变分分析与广义微分 I：基础理论 2011. 9 〔美〕 Boris S. Mordukhovich 著 赵亚莉 王炳武 钱伟懿 译

19 随机微分方程导论应用(第 6 版) 2012. 4 〔挪〕Bernt Øksendal 著 刘金山 吴付科 译

20 金融衍生产品的数学模型 2012.4 郭宇权(Yue-Kuen Kwok) 著 张寄洲 边保军 徐承龙 等 译

21 欧拉图与相关专题 2012.4 〔英〕Herbert Fleischner 著 孙志人 李 皓 刘桂真 刘振宏 束金龙 译 张 昭 黄晓晖 审校

22 重分形：理论及应用 2012.5 〔美〕戴维・哈特 著 华南理工分形课题组 译

23 组合最优化：理论与算法 2014. 1 〔德〕 Bernhard Korte Jens Vygen 著 姚恩瑜 林治勋 越民义 张国川 译

24 变分分析与广义微分 II：应用 2014. 1 〔美〕 Boris S. Mordukhovich 著 李 春 王炳武 赵亚莉 王 东 译

25 算子理论的 Banach 代数方法(原书第二版) 2014.3 〔美〕 Ronald G. Douglas 著 颜 军 徐胜芝 舒永录 蒋卫生 郑德超 孙顺华 译

26 Bäcklund 变换和 Darboux 变换——几何与孤立子理论中的应用 2015.5 [澳]C. Rogers W. K. Schief 著 周子翔 译

27 凸分析与应用捷径 2015.9 〔美〕 Boris S. Mordukhovich, Nguyen Mau Nam 著 赵亚莉 王炳武 译

28 利己主义的数学解析 2017.8 〔奥〕 K. Sigmund 著 徐金亚 杨 静 汪 芳 译

29 整数分拆 2017.9〔美〕George E. Andrews 〔瑞典〕Kimmo Eriksson 著 傅士硕 杨子辰 译

30 群的表示和特征标 2017.9 〔英〕 Gordon James, Martin Liebeck 著 杨义川 刘瑞珊 任燕梅 庄 晓 译